

[ELA] [ELAP]

[G]

[GK] [INTL]

201 Espaces de fonctions Exemples et applications

I - Fonctions continues

1) Fonctions bornées [ELA] 143 - 145

- $B(X, E)$ $\|\cdot\|_\infty$
- cv simple et uniforme
- critère de Cauchy uniforme
- $(B(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ Banach

2) Espaces de fonctions C^0 sur un compact [ELA] [G]

- $C(X, E)$ $C_b(X, E)$ 145 31
- continuité uniforme
- $J(K)$ compact K compact
- Th bornes atteintes
- Th de Heine

3) densité [ELA] 158 [G] 306

- Polynômes de Bernstein
- DEV 1 • Th de Weierstrass
- application
- Weierstrass trigonométrique

II - Espaces de f et intégrables

1) Espace L^p [GK] 209 - 211 [INTL] 114

- def $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ L^∞ 203
- DEV 2 • Holder - Minkowski
- $\mathbb{1}_Q$
- relation d'équivalence
- L^p + norme
- L^p evn

- inclusion $L^p + CE$ en mesure infinie
- Riesz - Fischer

2) Convolution dans L^1 [ELAF] 75

- def et prop

3) TF dans L^1 [ELAF] 109-115

- def
- Riemann Lebesgue
- $f \mapsto \hat{f}$ linéaire C^0
- injectivité de la TF
- TF de la Gaussienne.

201: Espaces de fonctions. Exemples et applications

Soit $V, W = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I - Espace de fonctions continues

Soit X un ensemble et E un V, W -espace vectoriel normé. Soit (f_n) une suite de fonctions de X dans E et $f: X \rightarrow E$.

1) Fonctions continues bornées

Définition 1: On note $B(X, E)$ l'espace vectoriel des applications bornées de X dans E . Pour tout $f \in B(X, E)$ la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$ est la norme de la convergence uniforme. E un V, W soit de $B(X, E)$ un espace vectoriel normé.

Proposition 2: Une suite (f_n) de $B(X, E)$ converge uniformément vers f sur X si et seulement si $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

De plus $f \in B(X, E)$

Théorème 3: (critère de Cauchy uniforme)

Soit E complet, (f_n) est uniformément convergente si $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N, \forall p \geq n \forall x \in X$

$$\|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \epsilon$$

Théorème 4: L'espace vectoriel $B(X, E)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est complet.

[EIA]
143

2) Fonctions continues sur un compact

Théorème 5: Soit (f_n) convergant uniformément vers f . Si les fonctions f_n sont toutes continues en $x \in X$ alors f est continue en x .

On suppose maintenant que X est compact.

Proposition 6: Soit $f: X \rightarrow E$, alors $f(x)$ est compact

Notation 7: On note $C(X, E)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans E .

Théorème 8: (des bornes atteintes) Soit $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 9: (Heine) Soit $f: X \rightarrow E$ continue.

Alors f est uniformément continue.

Théorème 10: Soit E complet. Alors $C(X, E)$ est un fermé de $B(X, E)$. Ainsi $C(X, E)$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.

Exemple 11: Soit $a < b$ ($\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty$) est complet.

3) Densité

Théorème 12: (Weierstrass) Toute fonction continue f sur un intervalle compact $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Application 13: Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1])$, si $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_0^1 f(x) x^n dx = 0$ alors $f \equiv 0$ sur $[0, 1]$

[EIA]
155

[G]
306

[EAF] 159
Définition 14: On appelle polygène trigonométrique, toute combinaison linéaire d'éléments de la famille $(e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$

Théorème 15: Toute fonction continue 2π -périodique de $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polygènes trigonométriques

II - Espaces de fonctions Lebesgue-intégrables
 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1) Espaces L^p

[EK] 209
Définition 16: Pour $p \in [1, +\infty[$, on note $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'ensemble des applications mesurables de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tel que $\int_X |f(x)|^p d\mu(x) < +\infty$
 On note $\|f\|_p = (\int_X |f(x)|^p d\mu(x))^{1/p}$

On note $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'ensemble des applications mesurables de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telles que $\|f\|_\infty < +\infty$ où $\|f\|_\infty = \inf \{M \in \mathbb{R}, \mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0\}$

lemme 17: (Inégalité de Young)
 Soit $p, q > 0$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $\forall u, v \in \mathbb{R}^+$,
 $uv \leq \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q$

Théorème 18: (Inégalité de Hölder) Soit $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $f \in L^p$ et $g \in L^q$. Alors $fg \in L^1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Théorème 19: (Inégalité de Minkowski) Soit $p \in [1, +\infty[$
 Soit $f, g \in L^p$. Alors $f+g \in L^p$ et
 $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Remarque 20: $\|\cdot\|_p$ ne définit pas une norme dans L^p car $\|1_A\|_p = 0$ et $1_A \neq 0$

2) Espace L^p

[Int L] 114
Proposition 21: Soit $g \in L^p$ et $g = g \mu$
 Alors $g \in L^p$ et on pose fg si $g = g \mu$
 On note $L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = L^p(X, \mathcal{A}, \mu)_{\mu}$

Proposition 22: Soit $1 \leq p < +\infty$. Alors $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

Proposition 23: Si $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ on a $L^q \subset L^p$
 (mesure finie)

Théorème 24: Pour tout $p \in [1, +\infty[$, L^p est complet.

3) Convolution dans L^1

[EAF] 75
Définition 25: On dit que deux fonctions $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont convolables si, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable. On définit alors le produit alors le produit de convolution de f et g par:
 $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$

Théorème 26: Soient f et $g \in L^1(\mathbb{R})$. Pour presque tout x , l'application $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. La fonction $f * g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

4) Transformée de Fourier dans L^1

Définition 27: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier de f , notée $\hat{f}$, la fonction :

$$\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

Lemme 28: (Riemann-Lebesgue) Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ existe et $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

Théorème 29: Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et bornée par $\|f\|_1$. On appelle transformation de Fourier l'application

$$F: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \hat{f}$$

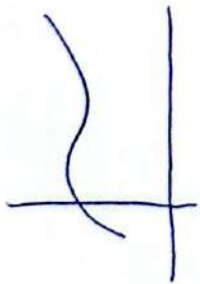
Corollaire 30: La transformation de Fourier est une application linéaire continue.

Exemple 31: Soit $g(x) = e^{-ax^2}$ avec $a > 0$. Alors $\hat{g}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$.

Proposition 32: Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$$

Théorème 33: La transformée de Fourier est une application injective



Courbe

On s'intéresse aux caractéristiques:

- Continuité
- min et max
- domaine de def
- intégrable? dérivable?

Objet de la leçon: chercher des outils permettant de regrouper des fonctions par rapport à leurs caractéristiques

Espaces de fonctions

$\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$

Applications au TF dans L^1

② Moins de régularité mais plus de structure

→ fct de base intégrable L^p

$f = g, \mu$

outils

intégrale

Hölder

Minkowski

DEV2

201: Espaces de fonctions
Exemples et applications

$(L^p, \|\cdot\|)$ evn complet

① Régulières

→ borné $B(X, \mathbb{R})$

L → min et max

→ sur un compact

L → domaine de def

→ Heine

f unif continue

intégrable

Th de Weierstrass

DEV1

approximation par des polynômes

hyper régulières