

Leçon 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Approximation par des polynômes.

1.1 Interpolation.

[Dem16], II.1 et II.2

Ici, $a < b$ sont deux réels fixés, $x_0, \dots, x_n$ des points distincts de $[a; b]$ et $f \in \mathcal{C}([a; b])$ fixée.

Proposition/Définition 1. *Il existe une unique famille $(L_0, \dots, L_n)$ de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que $\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ (où δ est le symbole de Kronecker). Ils sont donnés par la formule $L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$. On les appelle les **polynômes interpolateurs de Lagrange** associés à la famille $(x_0, \dots, x_n)$.*

Le polynôme $p_n = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$. On l'appelle **polynôme interpolateur (de Lagrange)** de f en les x_i .

Dans la suite, p_n désignera systématiquement le polynôme interpolateur de f en les x_i .

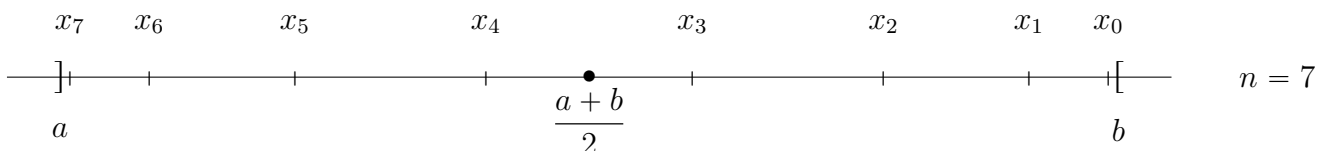
Exemple 2. Si $f = \exp$ et $x_0, x_1, x_2 = -1, 0, 1$, alors $p_2 = e^{-1} \frac{X(X-1)}{(-1)(-2)} + 1 \frac{(X+1)(X-1)}{1(-1)} + e \frac{(X+1)X}{2 \cdot 1} = (\cosh(1) - 1)X^2 + \sinh(1)X - 1$.

Proposition 3. Supposons que f soit dérivable $n+1$ fois sur $[a; b]$. Alors, $\forall x \in [a; b]$, $\exists \xi_x \in]a; b[$ tel que $f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \pi_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi_x)$ où $\pi_{n+1} := \prod_{i=0}^n (X - x_i)$.

Corollaire 4. $\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\pi_{n+1}\|_\infty \|f^{(n+1)}\|_\infty$.

Remarque 5. Si les x_i sont équidistants d'un pas $h = \frac{b-a}{n}$, alors $\|\pi_{n+1}\|_\infty$ est de l'ordre de $h^{n+1} n! = \frac{n!}{n^{n+1}} (b-a)^{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1}$.

Définition 6. Les **points d'interpolation de Tchebychev** d'ordre n de l'intervalle $[a; b]$ sont les points $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$, $0 \leq i \leq n$.



Remarque 7. $\cos(\frac{2i+1}{2n+2}\pi)$, $0 \leq i \leq n$ sont exactement les racines du $n+1$ -ième polynôme de Tchebychev T_{n+1} défini par $T_{n+1}(\cos \theta) = \cos(n+1)\theta$.

Proposition 8. Pour les points d'interpolation de Tchebychev, on a $\|\pi_{n+1}\|_\infty = 2 \left(\frac{b-a}{4} \right)^{n+1}$.

Théorème 9. Supposons que f se développe en série entière au voisinage de $\frac{a+b}{2}$ avec un rayon de convergence $R > (\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2})(b-a)$ (où $\lambda = 1$ si les x_i sont quelconques, $\lambda = e$ si les x_i sont équidistants et $\lambda = 4$ si les x_i sont les points de Tchebychev). Alors, $\|f - p_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Contre-exemple 10 (phénomène de Runge). Soit $\alpha > 0$ un paramètre et $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + \alpha^2}$ qui se développe en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence α . Alors, pour des points répartis uniformément et pour α assez petit ($\alpha < \alpha_0 \simeq 0,526$), la suite de polynômes p_n ne converge pas uniformément vers f .

1.2 Approximation uniforme.

[HL09], I.1 et I.2 (la première partie sur le polynôme de meilleure approximation est faite dans [Dem16], II.3, mais d'une autre manière)

Remarque 11. $\mathbb{R}_n[X]$ se réalise comme un sous-espace de dimension finie de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([a; b]), \|\cdot\|_\infty)$, donc la distance uniforme d'une fonction $f \in \mathcal{C}([a; b])$ à $\mathbb{R}_n[X]$ est atteinte en au moins un $P \in \mathbb{R}_n[X]$. À quelle condition est-elle atteinte en un unique polynôme ?

D1

Théorème 12 (Haar). Soit F un sev de $\mathcal{C}([a; b])$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, ASSE :

1. $\forall f \in \mathcal{C}([a; b]), \exists ! q \in F$ tq $\|f - q\|_\infty = d(f, F)$;
2. $\forall q \in F$, si q s'annule en n points distincts, alors $q = 0$.

[GT96], II.IV.12 et [Che82], III.5

Exemple 13. Considérons $F = \mathbb{R}.id \subseteq \mathcal{C}([-1; 1])$ et $f \in \mathcal{C}([-1; 1])$ définie par $f(x) = 1+x$ si $x \leq 0$ et $f(x) = 1-x$ si $x \geq 0$. Alors, pour tout $\lambda \in [-1; 1]$, on a $\|f - \lambda.id\|_\infty = 1 = d(f, F)$ (dessin en annexe).

Corollaire 14. $\forall f \in \mathcal{C}([a; b]), \exists ! q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tq $\|f - q_n\|_\infty = d(f, \mathbb{R}_n[X])$.

Définition 15. q_n est appelé le **polynôme de meilleure approximation uniforme** à l'ordre n .

On se demande maintenant si $\|f - q_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, i.e. si $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}([a; b])$.

Lemme 16 (Dini). Soient X un espace métrique compact et (f_n) une suite croissante (i.e. $f_n \leq f_{n+1}$) de fonctions de $\mathcal{C}(X)$ à valeurs réelles. Supposons que (f_n) converge simplement vers $f \in \mathcal{C}(X)$. Alors, (f_n) converge uniformément vers f .

Exemple 17 (important). Soit (P_n) la suite de polynôme définie par récurrence par $P_0 = 0$ et $P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(X^2 - P_n^2)$. Alors, vus comme des fonctions continues sur $[-1; 1]$, les P_n convergent simplement de manière croissante vers $x \mapsto |x|$. Par le théorème de Dini, on en déduit que $x \mapsto |x|$ est limite uniforme de Polynômes sur $[-1; 1]$.

Définition 18. Soit X un espace métrique compact. On notera $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(X)$ et $\mathcal{C}^{\mathbb{C}}(X)$ les algèbres de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ respectivement.

Si H est une partie de $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(X)$ ou $\mathcal{C}^{\mathbb{C}}(X)$, on dira qu'elle est **séparante** lorsque : $\forall x \neq y \in X, \exists h \in H$ tq $h(x) \neq h(y)$.

Théorème 19 (Stone-Weierstrass, cas réel). Toute sous-algèbre H de $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(X)$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(X)$ (pour la norme uniforme).

Exemple 20. L'ensemble des fonctions lipschitziennes de X dans $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(X)$.

Corollaire 21. Si X est un compact de $\mathbb{R}^d$, alors l'ensemble des fonctions polynomiales en les coordonnées est dense dans $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(X)$.

Remarque 22. Le cas $d = 1$ est connu sous le nom de théorème de Weierstrass.

D2

Théorème 23 (théorème taubérien d'Hardy-Littlewood). Soit (a_n) une suite de réels positifs. Supposons que $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{1-x}$ (donc de rayon de convergence égal à 1). Alors, $s_n := \sum_{k=0}^n a_k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n$.

[Tit76], VII.51

Théorème 24 (Stone-Weierstrass, cas complexe). Toute sous-algèbre H de $\mathcal{C}^{\mathbb{C}}(X)$ séparante, stable par conjugaison et contenant les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}^{\mathbb{C}}(X)$.

Contre-exemple 25. Soit $R > 0$. Alors, $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas limite uniforme d'éléments de $\mathbb{C}[T]$ sur $\mathcal{D}(0, R)$ (car elle serait en particulier limite uniforme sur tout compact de fonctions holomorphes et donc elle même holomorphe, ce qui n'est pas).

Corollaire 26. Les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}_{2\pi}^{\mathbb{C}}$.

2 Approximation de fonctions L^p par des fonctions régulières.

On munit $\mathbb{R}^d$ de la tribu borélienne et on note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

2.1 Approximation par des fonctions continues à support compact.

[Rud20], II.6 et III.3

On note $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$.

Théorème 27 (Lusin). Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable telle que f soit nulle en dehors d'un borélien A de mesure $\lambda(A) < +\infty$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ telle que $\lambda(\{x, f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$ et $\|g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$.

Corollaire 28. Pour $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Contre-exemple 29. $\forall g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d), \|1 - g\|_{\infty} \geq 1$ donc $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ n'est pas dense dans $L^{\infty}(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 30. Pour $1 \leq p < +\infty$, $L^p(\mathbb{R}^d)$ est donc le complété de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ pour la norme $\|\cdot\|_p$ (grâce au théorème de Riesz-Fischer). Le complété de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ pour la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ et l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues qui s'annulent à l'infini.

2.2 Produit de convolution.

[HL09], IV.3

Définition 31. Pour $a \in \mathbb{R}^d$ et $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, on note $\tau_a(f) : x \mapsto f(x - a)$.

Proposition 32. Pour $1 \leq p \leq +\infty$, $(\tau_a)_{a \in \mathbb{R}^d}$ est un groupe commutatif d'isométries de $L^p(\mathbb{R}^d)$. Pour $1 \leq p < +\infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, l'application $\mathbb{R}^d \rightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$, $a \mapsto \tau_a(f)$ est uniformément continue.

Définition 33. Soient $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions boréliennes. On dit que f et g sont **convolables** lorsque pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $y \mapsto f(x - y)g(y)$ est intégrable. On note alors $f * g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y)dy$ le **produit de convolution** de f et g .

Remarque 34. f et g sont convolables ssi g et f le sont et on a $f * g = g * f$.

Proposition 35. Soient f et g deux fonctions boréliennes convolables. On suppose que f et g sont nulles en dehors d'ensembles fermés F et G respectivement. Alors $f * g$ est nulle en dehors de $\overline{F + G}$. En particulier, si F et G sont compacts (i.e. f et g sont à supports compacts), alors $f * g$ est aussi à support compact et de support inclus dans $F + G$.

Contre-exemple 36. $\mathbb{1}_{[0;1]}$ est à support compact mais $\mathbb{1} * \mathbb{1}_{[0;1]} = \mathbb{1}$ n'est pas à support compact.

Théorème 37 (Inégalité de Young). Soient $p, q \in [1; +\infty]$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ et $f \in L^p, g \in L^q$. Alors f et g sont convolables. De plus, si on pose $r \in [1; +\infty]$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, alors $f * g \in L^r$ et $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Proposition 38. Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $f * g$ est uniformément continue. Si de plus $1 < p < +\infty$, alors $f * g(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$.

Théorème 39. $(L^1, +, *, \|\cdot\|_1)$ est une algèbre de Banach commutative non unitaire.

Remarque 40. En particulier, $*$ est associatif sur L^1 , ce qui n'est plus vrai pour des fonctions plus générales.

Contre-exemple 41. En posant $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$, $g = \mathbb{1}_{[-1;0]} - \mathbb{1}_{[0;1]}$ et $h = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$, on a $(f * g) * h = \mathbb{1}$ et $f * (g * h) = 0$.

2.3 Approximation par des fonctions lisses.

[HL09], IV.3 et [Li13], III.1.5

Définition 42. On appelle **approximation de l'unité** tout suite $(\rho_n) \in (L^1)^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \rho_n \geq 0$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n = 1$;
3. $\forall \varepsilon > 0, \int_{\{|x| > \varepsilon\}} \rho_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exemple 43. Si ρ est une fonction positive intégrable d'intégrale 1 quelconque, alors $\rho_n : x \mapsto n^d \rho(nx)$ définit une approximation de l'unité.

Remarque 44. C'est ce qui va remplacer notre unité manquante dans l'algèbre L^1 .

Théorème 45. Soit (ρ_n) une approximation de l'unité, $p \in [1; +\infty[$ et $f \in L^p$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, \|f * \rho_n\|_p \leq \|f\|_p$ et $f * \rho_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ dans L^p .

Lemme 46. $\exists \rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\rho \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho = 1$.

Théorème 47. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^p$ pour $1 \leq p < +\infty$. Alors $f * \varphi \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$ et, pour tout $k_1 + \dots + k_d =: l \leq k$, on a : $\frac{\partial^l}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_d^{k_d}} (f * \varphi) = f * (\frac{\partial^l}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_d^{k_d}} \varphi)$.

Corollaire 48. Pour $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans L^p .

3 Séries de Fourier.

3.1 Définitions.

[Amr08], IV.2 à IV.4.

Définition 49. On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont 2π -périodiques. On note également $L_{2\pi}^p$ l'ensemble des (classes de) fonctions mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont presque partout 2π -périodiques et qui vérifie $\int_0^{2\pi} |f|^p < +\infty$. On munit $L_{2\pi}^p$ de la norme $\|f\|_p := (\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^p)^{1/p}$.

Remarque 50. $L_{2\pi}^2$ est un Hilbert pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$.

Théorème 51. $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L_{2\pi}^2$ où $(e_n : x \mapsto e^{inx}) \in \mathcal{C}_{2\pi}$.

Définition 52. Pour $f \in L_{2\pi}^1$ et $n \in \mathbb{Z}$, on note $c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$ le n -ième **coefficient de Fourier**. On note également $S_N(f) := \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n$ et $\sigma_N(f) := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} S_j(f)$.

Remarque 53. Si $f \in L_{2\pi}^2$, on a $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$. Par exemple, si $P = \sum_{n=-N}^N a_n e_n$ est un polynôme trigonométrique, on a $c_n(P) = a_n$ si $|n| \leq N$ et 0 sinon.

Définition 54. Pour $f, g \in L_{2\pi}^1$, on note quand il existe $f * g(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-x) g(t) dt$ le **produit de convolution** de f et g au point x .

Remarque 55. Les propriétés de la convolution sur $\mathbb{R}^d$ restent valables, en particulier, $f * g(x)$ est défini presque partout.

Proposition 56. $\gamma : (L_{2\pi}^1, +, *, \|\cdot\|_1) \rightarrow (c_0(\mathbb{Z}), +, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$ est un morphisme continu d'algèbres de norme d'opérateur 1 où $c_0(\mathbb{Z}) := \{(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, |a_n| \xrightarrow{|n| \rightarrow +\infty} 0\}$.

3.2 Résultats de convergence.

[Amr08], IV.4 à IV.6.

Proposition 57. $L_{2\pi}^2 \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. De plus, pour $f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$
 $f \in L_{2\pi}^2$, on a $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n$ dans $L_{2\pi}^2$.

Définition 58 (Noyaux trigonométriques). $D_N := \sum_{n=-N}^N e_n$ est le **noyau de Dirichlet** d'ordre N .

$K_N := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} D_j$ est le **noyau de Féjer** d'ordre N .

Proposition 59. 1. D_N est le prolongement par continuité de $x \mapsto \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin(x/2)}$;

2. K_N est le prolongement par continuité de $x \mapsto \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2$

3. Pour $f \in L_{2\pi}^1$, $S_N(f) = f * D_N$ et $\sigma_N(f) = f * K_N$;

4. $(K_N)_{N \geq 1}$ est une approximation de l'unité.

Théorème 60 (Féjer). Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ (resp. $L^p_{2\pi}$). Alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $(\sigma_N(f))$ converge vers f pour la norme uniforme (resp. pour la norme $\|\cdot\|_p$).

Corollaire 61. Si $f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}$ vérifient $c_n(f) = c_n(g) \forall n \in \mathbb{Z}$, alors $f = g$. Si $f, g \in L^1_{2\pi}$, alors ce n'est vrai que presque partout. En particulier, γ est injective.

Théorème 62. Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $(S_N(f))$ converge simplement, alors $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 63. Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi} \cap \mathcal{C}^1_{pm}$, alors $(S_N(f))$ converge normalement et $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n$.

Théorème 64 (Dirichlet). Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et $x \in \mathbb{R}$. On suppose que f possède des limites à gauche et à droite et des dérivées à gauche et à droite en x . Alors, $S_N(f)(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$.

Dbon

Théorème 65. On note $W := \{f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|f\|_W := \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty\}$.

1. $W \subseteq \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et $\forall f \in W, f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)e_n$;
2. $(W, +, \cdot, \times, \|\cdot\|_W)$ est une algèbre de Banach et $\theta : W \rightarrow l^1(\mathbb{Z})$ est un isomorphisme isométrique d'algèbres de Banach (la loi de multiplication sur $l^1(\mathbb{Z})$ est la convolution donnée par $(a * b)_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m b_{n-m}$) ;
 $f \mapsto (c_n(f))$
3. $\forall f \in W, \|f - S_N(f)\|_W \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ où $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f)e_n$;
4. Les inclusions $(\mathcal{C}^1_{2\pi}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}) \hookrightarrow (W, \|\cdot\|_W) \hookrightarrow (\mathcal{C}^0_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ sont continues ;
5. (Théorème de Wiener) Soit $f \in W$ ne s'annulant pas. Alors $\frac{1}{f} \in W$ (i.e. W est une **sous-algèbre lisse** de $\mathcal{C}^0_{2\pi}$).

[Can09], VI.4 (pas tout)

Remarque pour cette leçon : Dans cette leçon, mettre uniquement les points 1, 3 et 5.

Références

- [Tit76] E.C. TITCHMARSH. *The Theory of Functions*. OXFORD UNIVERSITY PRESS, USA, 1976. ISBN : 9780198533498.
- [Che82] E.W. CHENEY. *Introduction to Approximation Theory*. CHELSEA, 1982. ISBN : 9780828403177.
- [GT96] S. GONNORD et N. TOSEL. *Topologie et analyse fonctionnelle*. ELLIPSES, 1996. ISBN : 9782729896942.
- [Amr08] M. EL AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels - Niveau M1*. ELLIPSES, 2008. ISBN : 9782729839031.

- [Can09] B. CANDELPERGER. *Calcul intégral*. CASSINI, 2009. ISBN : 9782842250539.
- [HL09] F. HIRSCH et G. LACOMBE. *Éléments d'analyse fonctionnelle*. DUNOD, 2009. ISBN : 9782100535941.
- [Li13] D. LI. *Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés*. ELLIPSES, 2013. ISBN : 9782729883058.
- [Dem16] J.P. DEMAILLY. *Analyse numérique et équations différentielles - 4e édition*. EDP SCIENCES, 2016. ISBN : 9782759819263.
- [Rud20] W. RUDIN. *Analyse réelle et complexe*. DUNOD, 2020. ISBN : 9782100820542.