

Leçon 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Espaces vectoriels normés.

1.1 Généralités.

[Li13], I.1

~ 10 items.

Suivre le paragraphe I.1 du Li, sauf le I.1.3 sur les espaces de Banach qu'on traite dans notre 3e sous-partie. Donner très rapidement les généralités sur les normes et les applications linéaires continues et surtout donner trpn d'exemples (y'en a plein dans le Li).

1.2 Cas de la dimension finie.

[Li13], I.2

~ 5-10 items.

Suivre le Li. Rajouter des exemples/contre-exemples.

1.3 Espaces de Banach.

[Li13], I.1.3-4 et IV

~ 10 items.

Donner la définition et des exemples (I.1.3 du Li), mentionner que E^* le dual topologique est toujours un Banach (I.1.4 du Li). Donner ensuite le théorème de Baire et ses conséquences (IV du Li) et des exemples d'applications, comme la non-surjectivité de la transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ (IV aussi) ou l'existence de fonctions continues dont la série de Fourier ne converge pas ponctuellement (exo 15).

2 Espaces de Hilbert.

2.1 Généralités.

[Li13], II.1

~ 10 items.

Encore une fois, pas trop s'attarder sur les définitions et mettre des exemples.

2.2 Théorème de projection.

[Li13], II.2

~ 5 items.

Donner le théorème de projection et ses conséquences : théorème du supplémentaire orthogonal, théorème de représentation de Riesz et existence de l'adjoint d'un opérateur.

2.3 Bases hilbertiennes.

[Li13], II.3

~ 10 items.

Donner rapidement les définitions et le théorème de classification. On peut utiliser le paragraphe II.4 pour donner des exemples.

D1

Théorème. Soit $B^2(\mathbb{D}) := \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap L^2(\mathbb{D})$ l'espace de **Bergman** du disque unité où $\mathbb{D}$ est le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$. On munit $B^2(\mathbb{D})$ du produit scalaire induit par celui de $L^2(\mathbb{D})$ et on note $e_n : z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n \in B^2(\mathbb{D})$. Alors,

1. $B^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert ;
2. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $B^2(\mathbb{D})$;
3. On pose $K : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, on a alors : $\forall f \in B^2(\mathbb{D}), f = \int_{\mathbb{D}} f(w) K(., w) dw$ (où $(z, w) \mapsto \frac{1}{\pi(1 - z\bar{w})^2}$ dw est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{D}$).

[BB24], 17

3 Espaces L^p .

3.1 Premiers résultats.

[HL09], IV.1

~ 5 items.

Suivre le Hirsch-Lacombe en se plaçant dans le cas de $\mathbb{R}^d$.

3.2 Dualité.

[HL09], IV.2

~ 5 items.

Donner le théorème de dualité, le contre-exemple $L^1 \neq (L^\infty)^*$ et le dev 2 en application du théorème.

D2

Théorème. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors : f est lipschitzienne $\Leftrightarrow \exists g \in l^\infty(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, f(x) - f(0) = \int_0^x g(t) dt$.

[Bre20], VIII.2 et [HL09], VIII.2.exo3

Remarque : on peut choisir de montrer la dualité $(L^1)^* \simeq L^\infty$ mais dans ce cas il faut admettre d'autres passages techniques de la preuve.

4 Algèbres de Banach.

[Arv01], I
~ 5 items.

Dbon

Théorème. On note $W := \{f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|f\|_W := \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty\}$.

1. $W \subseteq \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et $\forall f \in W, f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$;
2. $(W, +, \cdot, \times, \|\cdot\|_W)$ est une algèbre de Banach et $\theta : W \rightarrow l^1(\mathbb{Z})$ est un isomorphisme isométrique d'algèbres de Banach (la loi de multiplication sur $l^1(\mathbb{Z})$ est la convolution donnée par $(a * b)_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m b_{n-m}$) ;
 $f \mapsto (c_n(f))$
3. $\forall f \in W, \|f - S_N(f)\|_W \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ où $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n$;
4. Les inclusions $(\mathcal{C}^1_{2\pi}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}) \hookrightarrow (W, \|\cdot\|_W) \hookrightarrow (\mathcal{C}^0_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ sont continues ;
5. (Théorème de Wiener) Soit $f \in W$ ne s'annulant pas. Alors $\frac{1}{f} \in W$ (i.e. W est une **sous-algèbre lisse** de $\mathcal{C}^0_{2\pi}$).

[Can09], VI.4 (pas tout)

Références

- [Arv01] W. ARVESON. *A Short Course on Spectral Theory*. SPRINGER, 2001. ISBN : 9780387953007.
- [Can09] B. CANDELPERGHER. *Calcul intégral*. CASSINI, 2009. ISBN : 9782842250539.
- [HL09] F. HIRSCH et G. LACOMBE. *Éléments d'analyse fonctionnelle*. DUNOD, 2009. ISBN : 9782100535941.
- [Li13] D. LI. *Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés*. ELLIPSES, 2013. ISBN : 9782729883058.
- [Bre20] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*. DUNOD, 2020. ISBN : 9782100820283.
- [BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.