

Leçon 206 : Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Espaces vectoriels normés de dimension finie.

1.1 Équivalence des normes et conséquence.

[Li13], I.2

~ 11 items.

parties compactes dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ (Bolzano-Weierstrass) | définition normes équivalentes | équivalence des normes en dimension finie | contre-exemple en dimension infinie | parties compactes d'un evn de dimension finie | contre-exemple : théorème de Riesz | compacts d'intérieur vide en dimension infinie | evn de dimension finie est complet, fermé dans un plus gros evn | application linéaires sont continues en dimension finie | contre-exemple en dimension infinie | distance à un sev de dimension finie est atteinte

1.2 Approximation uniforme de fonctions continues.

[Dem16], II.3

~ 5 items.

DEV 1 | corollaire : existence et unicité du polynôme de meilleure approximation uniforme | définition polynôme de Tchebychev | polynôme de meilleure approximation de X^{n+1} | théorème de Weierstrass

D1

Théorème. Soit F un sev de $\mathcal{C}([a; b])$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, ASSE :

1. $\forall f \in \mathcal{C}([a; b]), \exists ! q \in F$ tq $\|f - q\|_\infty = d(f, F)$;
2. $\forall q \in F$, si q s'annule en n points distincts, alors $q = 0$.

[GT96], II.IV.12 et [Che82], III.5

2 Calcul différentiel.

2.1 Définitions et premières propriétés.

[Ave97], I et [Rou15], II (et [Gou20], V.1)

~ 11 items.

définition application différentiable, différentielle | remarque : intérêt de la dimension finie | exemples

| différentielle d'une application bilinéaire | exemple | linéarité de la différentielle | définition dérivées directionnelle, dérivée partielle | différentiable $\Rightarrow$ existence de dérivées partielles | contre-exemple pour la réciproque | définition matrice jacobienne | définition $\mathcal{C}^1$ | caractérisation par les dérivées partielles

2.2 Optimisation.

[Ave97], IV et [Rou15], VI-VII

~ 9 items.

minimum $\Rightarrow$ point critique | contre-exemple | définition différentielles d'ordres supérieurs | définition dérivées partielles d'ordre 2, Hessienne | théorème de Schwartz | conditions d'extremum du second ordre | contre-exemple | théorème des extremas liés | exemple

2.3 Théorème d'inversion locale.

[Ave97], III et VIII et [Rou15], V

~ 7 items.

définition $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme | conséquence sur la dimension des espaces vectoriels | théorème d'inversion locale | application : formes normales | application : théorème du rang constant | application : DEV 2 | (application : DEV bonus)

D2

Théorème (Lemme de Morse). *Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ avec $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ contenant 0. Supposons que 0 est un point critique non dégénéré de f et $\text{sign}(D^2f(0)) = (p, n-p)$. Alors, $\exists \varphi$ un difféomorphisme entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$ où $u = \varphi(x)$.*

[Rou15], V.5.66 et VI.3.144

Dbon

Théorème (Brouwer). *Toute application $\mathcal{C}^1$ de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet un point fixe.*

[GT98], II.5 et 7

Remarque : si on a le temps, expliquer comment on généralise ce théorème au cas d'une application seulement continue.

3 Équations différentielle linéaires.

[Ber17], II.2-3

~ 3 items.

Cauchy-Lipschitz linéaire | structure de l'ensemble des solutions | exemple

4 Probabilités.

[App13], XXVII.2

~ 3 items.

Théorème. Soit P une matrice ergodique (i.e. stochastique et $\exists k \geq 1, P^k > 0$). Alors :

1. $\forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(P), |\lambda| \leq 1$;
2. 1 est l'unique valeur propre de module 1, elle est de multiplicité 1 ;
3. il existe une unique loi invariante π^* pour P (i.e. vecteur propre à gauche pour la valeur propre 1), ses coordonnées sont strictement positives ;

$$4. P^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \pi^* \\ \vdots \\ \pi^* \end{pmatrix}.$$

[App13], XXVII.30

Références

- [Che82] E.W. CHENEY. *Introduction to Approximation Theory*. CHELSEA, 1982. ISBN : 9780828403177.
- [GT96] S. GONNORD et N. TOSEL. *Topologie et analyse fonctionnelle*. ELLIPSES, 1996. ISBN : 9782729896942.
- [Ave97] A. AVEZ. *Calcul différentiel*. MASSON, 1997. ISBN : 9782225790799.
- [GT98] S. GONNORD et N. TOSEL. *Calcul différentiel*. ELLIPSES, 1998. ISBN : 9782729858520.
- [App13] W. APPEL. *Probabilités pour les non-probabilistes*. H&K, 2013. ISBN : 9782351412985.
- [Li13] D. LI. *Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés*. ELLIPSES, 2013. ISBN : 9782729883058.
- [Rou15] F. ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel*. CASSINI, 2015. ISBN : 9782842251864.
- [Dem16] J.P. DEMAILLY. *Analyse numérique et équations différentielles - 4e édition*. EDP SCIENCES, 2016. ISBN : 9782759819263.
- [Ber17] F. BERTHELIN. *Équations différentielles*. CASSINI, 2017. ISBN : 9782842252298.
- [Gou20] X. GOURDON. *Les maths en tête. Analyse - 3e édition*. ELLIPSES, 2020. ISBN : 9782340056992.