

Leçon 205 : Espaces complets. Exemples et applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Notion de complétude.

1.1 Suites de Cauchy.

[Gou20], I.2.3

~ 5 items.

Suivre le Gourdon en rajoutant le fait qu'une suite de Cauchy avec une valeur d'adhérence converge.

1.2 Espaces complets.

[Gou20], I.2.3

~ 10 items.

Pareil en rajoutant la définition du complété (dans les exercices). Mettre le contre-exemple de $\mathbb{Q}$. Définir rapidement les espaces de Banach. Mettre l'exemple des $\mathbb{R}$ -evn de dimension finie, l'exemple de $\mathcal{B}(X, E)$ pour E un métrique quelconque, l'exemple de $\mathcal{L}_c(E, F)$ si F est un Banach et le cas particulier du dual.

2 Théorèmes d'existence dans les espaces complets.

2.1 Théorème du point fixe.

[Gou20], I.2.3, V.3.1 et VI.1.2

~ 3 items.

Énoncer le théorème du point fixe et l'inversion locale et Cauchy-Lipschitz en application.

2.2 Prolongement des applications uniformément continues.

[Gou20], I.2.4.4 et [Amr08], III.2

~ 2 items.

Énoncer le théorème de prolongement des applications uniformément continues et la transformée de Fourier-Plancherel en application.

2.3 Théorème de Baire.

[Li13], IV et [Gou20], A

~ 5-10 items.

Suivre le Li. Bien penser à mettre des applications des théorèmes : non convergence de séries de Fourier, non surjectivité de la transformation de Fourier... (parfois faut chercher dans les exercices). On peut aussi chercher quelques applications dans le Gourdon.

3 Espaces de Banach.

3.1 Espaces de Hilbert.

[Li13], II et [Gou20], B

~ 10-15 items.

Rappeler la définition d'un espace de Banach. Donner la définition d'un espace de Hilbert (rapidement, en admettant la définition d'un produit scalaire), donner quelques exemples : $l^2, L^2, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$. Théorème de projection sur un convexe fermé et ses conséquences : projection orthogonale, supplémentaire orthogonale, représentation de Riesz... Définition d'une base hilbertienne, inégalité de Bessel, classification des espaces de Hilbert séparables. Développement 1.

D1

Théorème. Soit $B^2(\mathbb{D}) := \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap L^2(\mathbb{D})$ l'espace de **Bergman** du disque unité où $\mathbb{D}$ est le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$. On munit $B^2(\mathbb{D})$ du produit scalaire induit par celui de $L^2(\mathbb{D})$ et on note $e_n : z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n \in B^2(\mathbb{D})$. Alors,

1. $B^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert ;
2. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $B^2(\mathbb{D})$;
3. On pose $K : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, on a alors : $\forall f \in B^2(\mathbb{D}), f = \int_{\mathbb{D}} f(w) K(., w) dw$ (où $(z, w) \mapsto \frac{1}{\pi(1 - z\bar{w})^2}$ dw est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{D}$).

[BB24], 17

3.2 Espaces L^p .

[Li13], I.1.3 et [HL09], IV.1

~ 3 items.

Le Hirsch-Lacombe est plus complet sur ce thème mais ce qui est fait dans le Li est suffisant pour cette leçon.

3.3 Algèbres de Banach.

[Arv01], I.3

~ 5 items.

Définir une algèbre de Banach (commutative). Donner les exemples classiques : $L^1(\mathbb{R}^d), l^1(\mathbb{Z}), \mathcal{C}(K), \mathcal{L}_c(E)$. Développement 2 en dernier exemple.

D2

Théorème. On note $W := \{f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|f\|_W := \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty\}$.

1. $W \subseteq \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et $\forall f \in W, f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$;

2. $(W, +, \cdot, \times, \|\cdot\|_W)$ est une algèbre de Banach et $\theta : W \rightarrow l^1(\mathbb{Z})$ est un isomorphisme isométrique d'algèbres de Banach (la loi de multiplication sur $l^1(\mathbb{Z})$ est la convolution donnée par $(a * b)_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m b_{n-m}$) ;
3. $\forall f \in W, \|f - S_N(f)\|_W \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ où $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n$;
4. Les inclusions $(\mathcal{C}_{2\pi}^1, \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}) \hookrightarrow (W, \|\cdot\|_W) \hookrightarrow (\mathcal{C}_{2\pi}^0, \|\cdot\|_\infty)$ sont continues ;
5. (Théorème de Wiener) Soit $f \in W$ ne s'annulant pas. Alors $\frac{1}{f} \in W$ (i.e. W est une **sous-algèbre lisse** de $\mathcal{C}_{2\pi}^0$).

[Can09], VI.4 (pas tout)

Références

- [Arv01] W. ARVESON. *A Short Course on Spectral Theory*. SPRINGER, 2001. ISBN : 9780387953007.
- [Amr08] M. EL AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels - Niveau M1*. ELLIPSES, 2008. ISBN : 9782729839031.
- [Can09] B. CANDELPERGER. *Calcul intégral*. CASSINI, 2009. ISBN : 9782842250539.
- [HL09] F. HIRSCH et G. LACOMBE. *Éléments d'analyse fonctionnelle*. DUNOD, 2009. ISBN : 9782100535941.
- [Li13] D. LI. *Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés*. ELLIPSES, 2013. ISBN : 9782729883058.
- [Gou20] X. GOURDON. *Les maths en tête. Analyse - 3e édition*. ELLIPSES, 2020. ISBN : 9782340056992.
- [BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.