

Leçon 204 : Connexité. Exemples d'applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Notion de connexité.

1.1 Définitions et premières propriétés.

[Que25], IV.1

~ 7 items.

définition connexité | remarque : dernière caractérisation est fonctionnelle | remarque : on peut prendre n'importe quel espace discret dans cette caractérisation | exemples | définition partie connexe | passage aux douanes | DEV 1

D1

Théorème. 1. Si (u_n) est une suite à valeurs dans un espace métrique compact et $d(u_{n+1}, u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $\text{adh}(u)$ est connexe ;

2. Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ continue et $(u_n) \in [0; 1]^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0; 1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors, (u_n) converge si et seulement si $|u_{n+1} - u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$;

3. Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ continue et $(u_n) \in [0; 1]^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0; 1]$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(u_k)$. Alors, (u_n) converge vers un point fixe de f .

[IP19], 18

1.2 Stabilité de la notion.

[Que25], IV.2.1-3

~ 8 items.

union et chaînes de connexes | cas d'une intersection, contre-exemple | image par une fonction continue | exemple : arcs | contre-exemple pour la réciproque | A connexe et $A \subseteq B \subseteq \overline{A} \Rightarrow B$ connexe | produit de connexes | exemple : pavés

1.3 Notions reliés.

[Que25], IV.2.4 et IV.3.1-2

~ 7 items.

définition connexité par arcs | exemples | cpa $\Rightarrow$ connexe, réciproque pour un ouvert d'un evn | contre-exemple : sinus du topologue | définition bien enchaîné | connexe $\Rightarrow$ bien enchaîné | contre-exemple : $\mathbb{Q}$ | réciproque pour X compact

2 Composantes connexes.

2.1 Définitions et premières propriétés.

[Que25], IV.4.1

~ 4 items.

définition composantes connexes | plus grand connexe contenant x , $C(x)$ est fermé | caractérisation pratique | exemple : composantes connexes de GL_n

2.2 Parties connexes et parties ouvertes de $\mathbb{R}$.

[Que25], IV.3.3 et IV.4.3

~ 4 items.

description des connexes de $\mathbb{R}$ | corollaire : TVI | description des ouverts de $\mathbb{R}$ | exemple

2.3 Co-compacts de $\mathbb{C}$.

[Que25], IV.4.3

~ 3 items.

composantes connexes du complémentaire d'un compact dans $\mathbb{C}$ | enveloppe polynomialement convexe | exemple

3 Applications et notions plus poussées.

3.1 Homotopie et simple connexité.

[Que25], IV.5.5 et [QQ17], IV.6

~ 7 items.

définition homotopie | cas des lacets, homotopie pointée | exemple | définition concaténation de lacets | définition $\pi_1(X)$ pour X cpa | définition espace simplement connexe | exemples, contre-exemples

3.2 Applications à l'analyse réelle.

[Que25], IV.5.1-4

~ 6 items.

intervalles homéomorphes $\Leftrightarrow$ même nature | $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes | $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ne sont pas homéomorphes | remarque sur le passage du local au global | unicité globale de Cauchy-Lipschitz | DEV 2

D2

Théorème (Brouwer). *Toute application C^1 de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet un point fixe.*

[GT98], II.5 et 7

Remarque : si on a le temps, expliquer comment on généralise ce théorème au cas d'une application seulement continue.

3.3 Applications à l'analyse complexe.

[QQ17], III.5-6 et IV.7

~ 7 items.

prolongement des identités, unicité du prolongement holomorphe | intégrité de $\mathcal{H}(\Omega)$ | contre-exemple pour Ω non connexe | principe du maximum pour un ouvert borné | existence d'une primitive sur un ouvert simplement connexe | existence logarithme, racine n-ième | exemples

Références

- [GT98] S. GONNORD et N. TOSEL. *Calcul différentiel*. ELLIPSES, 1998. ISBN : 9782729858520.
- [QQ17] H. QUEFFÉLEC et M. QUEFFÉLEC. *Analyse complexe et applications*. CALVAGE&MOUNET, 2017. ISBN : 9782916352596.
- [IP19] L. ISENMANN et T. PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements - 2e édition*. ELLIPSES, 2019. ISBN : 9782340088306.
- [Que25] H. QUEFFÉLEC. *Topologie - 7e édition*. DUNOD, 2025. ISBN : 9782100874903.