

Leçon 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Espace des fonctions continues sur un compact.

1.1 Généralités.

[HL09], I.1

~ 6 items.

définition $\mathcal{C}(X)$, algèbre unitaire commutative | exemple | stable par $|\cdot|$, sup, inf | algèbre de Banach séparable pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ | lemme de Dini | exemple

1.2 Parties denses.

[HL09], I.2

~ 8 items.

définition partie séparante | exemple | Stone-Weierstrass cas réel | exemple | corollaire : théorème de Weierstrass | remarque : version constructive avec les polynômes de Bernstein | Stone-Weierstrass cas complexe | application : densité des polynômes trigonométriques dans $\mathcal{C}(\mathbb{U}, \mathbb{C})$

1.3 Parties compactes.

[HL09], I.2

~ 5 items.

définition équicontinuité ponctuelle, globale, uniforme | équivalence globale et uniforme car X compact | exemples | théorème Ascoli | exemples : lipschitzienne, fonction hölderienne

2 Espaces L^p .

2.1 Généralités.

[HL09], IV.1

~ 12 items.

définition espaces $\mathcal{L}^p$ et semi-normes L^p (dans le cas de $(X \subseteq \mathbb{R}^d, \lambda_{Leb})$) | exemple : $\|f\|_\infty$ pour f continue bornée | $\|f - g\|_p \Leftrightarrow f = g$ p.p., définition espaces L^p | inégalité Hölder | application : inclusion des L^p pour une masse finie | contre-exemple pour une masse non finie | inégalité Minkowski | Riesz-Fischer | corollaire : L^2 est un Hilbert | densité de $\mathcal{C}_c$ dans L^p pour $p < +\infty$ | corollaire : séparabilité de L^p pour $p < +\infty$ | contre-exemple pour L^∞

2.2 Dualité.

[HL09], IV.2

~ 4 items.

théorème de représentation de Riesz | remarque sur le cas $p = 2$ | contre-exemple cas L^∞ | application :
DEV 1

D1

Théorème. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors : f est lipschitzienne $\Leftrightarrow \exists g \in l^\infty(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, f(x) - f(0) = \int_0^x g(t)dt$.

[Bre20], VIII.2 et [HL09], VIII.2.exo3

Remarque : on peut choisir de montrer la dualité $(L^1)^* \simeq L^\infty$ mais dans ce cas il faut admettre d'autres passages techniques de la preuve.

2.3 Convolution.

[HL09], IV.3 et [Li13], III.1.5

~ 12 items.

définition translations, groupe commutatif d'isométries | $a \mapsto \tau_a(f)$ u.c. pour $p < +\infty$ | définition fonctions convolables, convolution | $f * g = g * f$ | support de $f * g$ | exemple fondamental : convolution $L^p - L^q$ exposants conjugués | inégalité de Young | L^1 est une algèbre de Banach commutative non unitaire | définition approximation de l'unité | exemple | $f * \phi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ dans L^p | régularité de la convolée | $\mathcal{C}_c^\infty$ dense dans L^p

3 Applications.

3.1 Espaces de fonctions holomorphes.

[QQ17], VIII.1 et VIII.3

~ 4 items.

théorème de Weierstrass | métrique sur $\mathcal{H}(\Omega)$, espace de Fréchet | théorème de Montel | DEV 2

D2

Théorème. Soit $B^2(\mathbb{D}) := \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap L^2(\mathbb{D})$ l'espace de Bergman du disque unité où $\mathbb{D}$ est le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$. On munit $B^2(\mathbb{D})$ du produit scalaire induit par celui de $L^2(\mathbb{D})$ et on note $e_n : z \mapsto$

$\sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n \in B^2(\mathbb{D})$. Alors,

1. $B^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert ;
2. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $B^2(\mathbb{D})$;
3. On pose $K : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, on a alors : $\forall f \in B^2(\mathbb{D}), f = \int_{\mathbb{D}} f(w) K(., w) dw$ (où $(z, w) \mapsto \frac{1}{\pi(1 - z\bar{w})^2}$
 dw est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{D}$).

[BB24], 17

3.2 Analyse de Fourier.

[Amr08], IV

~ 7 items.

notations $L_{2\pi}^p$, $\mathcal{C}_{2\pi}$ | base hilbertienne de $L_{2\pi}^2$ | définition coefficients Fourier, série de Fourier | théorème de Féjer | injectivité coefficients de Fourier | DEV bonus : incertitude suédois | DEV bonus : algèbre de Wiener

Dbon

Théorème. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on note $A := \{t \in \mathbb{R}, f(t) \neq 0\}$ et $B := \{\xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) \neq 0\}$. Si $\lambda(A) < +\infty$ et $\lambda(B) < +\infty$, alors $f = 0$ presque partout.

[BB24], 32

Remarque : A n'est pas bien défini mais $\lambda(A)$ oui.

Dbon

Théorème. On note $W := \{f \in L_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|f\|_W := \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty\}$.

1. $W \subseteq \mathcal{C}_{2\pi}^0$ et $\forall f \in W, f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$;
2. $(W, +, \cdot, \times, \|\cdot\|_W)$ est une algèbre de Banach et $\theta : W \rightarrow l^1(\mathbb{Z})$ est un isomorphisme isométrique d'algèbres de Banach (la loi de multiplication sur $l^1(\mathbb{Z})$ est la convolution donnée par $(a * b)_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m b_{n-m}$) ;
 $f \mapsto (c_n(f))$
3. $\forall f \in W, \|f - S_N(f)\|_W \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ où $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n$;
4. Les inclusions $(\mathcal{C}_{2\pi}^1, \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}) \hookrightarrow (W, \|\cdot\|_W) \hookrightarrow (\mathcal{C}_{2\pi}^0, \|\cdot\|_\infty)$ sont continues ;
5. (Théorème de Wiener) Soit $f \in W$ ne s'annulant pas. Alors $\frac{1}{f} \in W$ (i.e. W est une **sous-algèbre lisse** de $\mathcal{C}_{2\pi}^0$).

[Can09], VI.4 (pas tout)

Références

- [Amr08] M. EL AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels - Niveau M1*. ELLIPSES, 2008. ISBN : 9782729839031.
- [Can09] B. CANDELPERGER. *Calcul intégral*. CASSINI, 2009. ISBN : 9782842250539.
- [HL09] F. HIRSCH et G. LACOMBE. *Éléments d'analyse fonctionnelle*. DUNOD, 2009. ISBN : 9782100535941.
- [Li13] D. LI. *Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés*. ELLIPSES, 2013. ISBN : 9782729883058.
- [QQ17] H. QUEFFÉLEC et M. QUEFFÉLEC. *Analyse complexe et applications*. CALVAGE&MOUNET, 2017. ISBN : 9782916352596.

- [Bre20] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*. DUNOD, 2020. ISBN : 9782100820283.
- [BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.