

Leçon 191 : Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Géométrie affine et euclidienne.

1.1 Géométrie affine.

[Aud06], I.1-3

~ 10 items.

définition espace affine | définition application affine | caractérisation par les barycentres | définition repère affine | application affine envoyant un repère sur un autre | définition $GA(\mathcal{E})$ | exemple des translations | $0 \rightarrow E \rightarrow GA(\mathcal{E}) \rightarrow GL(E) \rightarrow 0$ | caractérisation unique point fixe | cas où $E = \ker(\vec{f} - id) \oplus \text{im}(\vec{f} - id)$

1.2 Géométrie euclidienne.

[Aud06], II, [Com21], II.8.10 et [CG18], XII.3

~ 13 items.

définition espace affine euclidien | définition isométrie vectorielle, affine | exemples (translation, symétries orthogonales) | isométries engendrées par les réflexions | définition déplacement | réduction au cas d'un point fixe | isométries vectorielles du plan | réduction générale des isométries vectorielles | classification des isométries de l'espace (tableau en annexe) | $Is^+(\mathcal{E})$ est cpa, interprétation en terme de déplacement | définition $Is(X), Is^+(X)$ | exemple du tétraèdre | DEV 1 : exemple du cube

D1

Théorème. *Les groupes d'isométries du cube sont $Is^+(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $Is(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

[CG18], XII.3.5

Remarque : si on a le temps et l'espace, on peut aussi faire les groupes d'isométries du tétraèdre.

1.3 Coniques.

[Aud06], VII.1-2

~ 7 items.

définition algébrique conique | exemple | définition f.q. homogénéisée, conique non dégénérée | remarque : intersection cône et plan (dessin en annexe) | classification des coniques | remarque sur la classification affine | définition par foyer et directrice (dessin en annexe)

2 Géométrie projective et coordonnées barycentriques.

2.1 Géométrie projective.

[Aud06], VI.1-5 et [Szp+09], V

~ 6 items.

définition $P(E)$ | exemples : cercle, sphère de Riemann, plan projectif | coordonnées homogènes |
définition sous-espace projectif | intersection de sous-espaces | liaison affine-projectif

2.2 Coordonnées barycentriques.

[Eid09], I.2-5 et [Szp+09], V.1

~ 9 items.

définition coordonnées barycentriques | lien avec les coordonnées cartésiennes | cas de $x + y + z = 0$,
lien avec la droite à l'infini | interprétation géométrique des coordonnées barycentriques | définition
équation barycentrique | exemple : équation de droites | remarque sur la droite à l'infini | parallélisme
de droite | condition d'alignement de trois points

2.3 Application aux coniques.

[Eid09], II.2

~ 4 items.

coniques circonscrites | remarque sur les formes dégénérées | DEV 2 | théorème de Pascal

D2

Théorème. 1. Soient A, B, C, D, E 5 points distincts du plan tels que 4 quelconques de ces points ne soient jamais alignés. Alors, il existe une unique conique $\mathcal{C}$ qui passe par ces 5 points. De plus, $\mathcal{C}$ est propre si et seulement si 3 quelconques de ces points ne sont jamais alignés.

2. (Théorème de Pascal) Soient A, B, C, A', B', C' 6 points distincts du plan, les 3 premiers n'étant pas alignés. Notons P l'intersection de (BC') et (CB') , Q l'intersection de (CA') et (AC') et R l'intersection de (AB') et (BA') . Alors, il existe une conique passant par les 6 points si et seulement si P, Q et R sont alignés.

[Eid09], II.2.2

Remarque : j'ai mis le théorème de Pascal pcq il est dar (si on fait tendre 2 points l'un vers l'autre, par exemple B' vers C , on obtient une méthode pour tracer la tangente d'une conique en un point en utilisant uniquement la règle!) mais en vrai je pense que le point 1 remplit déjà largement les 15 minutes.

3 Constructions à la règle et au compas.

[Goz09], IV et [Car01], II.1

~ 7 items.

Définition des nombres constructibles (complexes et réels) | quelques exemples de constructions |
théorème de Gauss-Wantzel | corollaire : algébrique de degré une puissance de 2 | problèmes des
grecs : quadrature du cercle, duplication du cube et trisection de l'angle | polygones constructibles :
DEV bonus

Dbon

Théorème. 1. Soit $n \geq 3$ et $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ sa décomposition en facteurs premiers. Alors, $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ est constructible si et seulement si les $e^{\frac{2i\pi}{p_j^{\alpha_j}}}$ sont constructibles ;

2. $\forall \alpha \in \mathbb{N}$, $e^{\frac{2i\pi}{2^\alpha}}$ est constructible ;

3. Soient $p \geq 3$ un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Alors, $e^{\frac{2i\pi}{p^\alpha}}$ est constructible si et seulement si $\alpha = 1$ et p est un nombre premier de Fermat (i.e. de la forme $p = 2^m + 1$).

[Car01], IV.2 et X.4.1

Références

- [Car01] J.C. CARREGA. *Théorie des corps : La règle et le compas*. HERMANN, 2001. ISBN : 9782705614492.
- [Aud06] M. AUDIN. *Géométrie*. EDP SCIENCES, 2006. ISBN : 9782868838834.
- [Eid09] J.D. EIDEN. *Géométrie analytique classique*. CALVAGE&MOUNET, 2009. ISBN : 9782916352084.
- [Goz09] I. GOZARD. *Théorie de Galois : Niveau L3-M1*. ELLIPSES, 2009. ISBN : 9782729842772.
- [Szp+09] A. SZPIRGLAS et al. *Mathématiques L3 : Algèbre*. PEARSON, 2009. ISBN : 9782744073519.
- [CG18] P. CALDERO et J. GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries Tome 2*. CALVAGE&MOUNET, 2018. ISBN : 9782916352671.
- [Com21] F. COMBES. *Algèbre et géométrie*. BRÉAL, 2021. ISBN : 9782749551630.