

Leçon 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Dénombrement et combinatoire.

1.1 Cardinal des ensembles finis.

[Gou21], VI.1.1

~ 5-10 items.

Suivre le Gourdon.

1.2 Listes et arrangements.

[Gou21], VI.1.2

~ 5-10 items.

Suivre le Gourdon.

1.3 Combinaisons.

[Gou21], VI.1.3

~ 5-10 items.

Suivre le Gourdon.

2 Dénombrement en analyse.

2.1 En probabilités.

[Gou21], VI.2.2 et VI.3.1 et [GK11], XIV.4.1.292

~ 5 items.

Probabilité uniforme dans un ensemble fini ($P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$), quelques exemples de probas sur $\mathbb{N}$ (géométrie, Poisson, Zéta...). Variable aléatoire discrète. Permutations aléatoires (pour l'instant j'ai pas de meilleure référence que l'exo du Garet-Kurtzmann).

2.2 Séries génératrices.

[Gou21], VI.3.5-6 et VI.4 et VI.1.4

~ 5-10 items.

Définition et premières propriétés des séries génératrices, lien avec la fonction caractéristique. Exemples d'utilisation (dev 1 et piocher d'autres exemples dans les exos du Gourdon). Définition et exemple d'utilisation des séries génératrices exponentielles : nombres de Bell (VI.1.4.exo9) ou VI.4.pb3.

D1

Théorème. On pose $X^n := X(X-1)\dots(X-n+1)$ et $X^{\bar{n}} := X(X+1)\dots(X+n-1)$. On définit $s(n, k)$ et $S(n, k)$ les **nombre de Stirling de première et deuxième espèce** respectivement par :

$$X^n = \sum_{k=0}^n s(n, k)X^k \text{ et } X^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n S(n, k)X^k \text{ } ((X^0, \dots, X^n) \text{ est une base de } \mathbb{R}[X]).$$
On remarque que $X^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n |s(n, k)|X^k$. Les $|s(n, k)|$ sont les **nombre de Stirling de première espèce non signés**.

1. Soit Σ_n une variable aléatoire uniforme sur $\mathfrak{S}_n$ et C_n le nombre de cycles à supports disjoints dans la décomposition de Σ_n . Alors, $\mathbb{P}(C_n = k) = \frac{|s(n, k)|}{n!}$. En particulier, $\mathbb{E}[C_n] = H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

et $\frac{C_n - \ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$.

2. $S(n, k)$ est le nombre de façons de partitionner $\llbracket 1; n \rrbracket$ en k sous ensembles. En particulier, $\sum_{k=0}^n S(n, k) = B_n$ où B_n est le n -ème **nombre de Bell**, comptant le nombre de façons de partitionner $\llbracket 1; n \rrbracket$.

[Gou21], VI.4.7

Remarque : développement beaucoup trop long, bien penser à choisir ce qu'on va dire selon la leçon.

Remarque pour cette leçon : dans cette leçon, ne pas faire le genre de TCL mais plutôt parler des nombre de Stirling de deuxième espèce si on a le temps.

3 Dénombrement en algèbre.

3.1 Théorie des Groupes.

[Rom21], I et [Per96], I.4-5

~ 10 items.

Piocher dans le Rombaldi quelques propriétés sur les groupes qui rentrent dans la leçon (cardinal d'un groupe quotient, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ Actions de groupes (finis), théorèmes de Sylow.

3.2 Corps finis.

[Rom21], XIII.4-5, [Per96], III.2 et IV.5 et [Goz09], VII

~ 10-15 items.

Cardinal d'un corps fini, de ses sous-corps. Carrés dans un corps fini, réciprocity quadratique par les f.q. Nombre de polynômes unitaires irréductibles de degré n . Cardinal des groupes linéaires, cardinal cône nilpotent. (Pour cette leçon, pas la peine du Gozard en vrai).

Dbon

Théorème. $\left(\frac{p}{p'}\right) \left(\frac{p'}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{p'-1}{2}}$

[CG17], V.C

Dbon

Théorème. Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $a(u) := \inf\{p \in \mathbb{N}, \ker(u^p) = \ker(u^{p+1})\}$ et $d(u) := \inf\{q \in \mathbb{N}, \operatorname{im}(u^q) = \operatorname{im}(u^{q+1})\}$. On a alors

$$a(u) = d(u) =: p, \quad E = \ker(u^p) \oplus \operatorname{im}(u^p), \quad u|_{\ker(u^p)} \text{ est nilpotent et } u|_{\operatorname{im}(u^p)} \text{ est inversible.}$$

De plus, une telle décomposition de E caractérise entièrement u .

Application. Il y a $q^{d(d-1)}$ matrices nilpotentes dans $M_d(\mathbb{F}_q)$.

[CP22], I.3.67

D2

Théorème. Si p est impair alors :

$$SO_2(\mathbb{F}_q) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} & \text{si } -1 \in \mathbb{F}_q^{*2} \\ \mathbb{Z}/(q+1)\mathbb{Z} & \text{si } -1 \notin \mathbb{F}_q^{*2} \end{cases}$$

De plus, $SO_2(\mathbb{F}_{2^n}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

[CG18], VIII.3

Références

- [Per96] D. PERRIN. *Cours d'algèbre (Agrégation)*. ELLIPSES, 1996. ISBN : 9782729855529.
- [Goz09] I. GOZARD. *Théorie de Galois : Niveau L3-M1*. ELLIPSES, 2009. ISBN : 9782729842772.
- [GK11] O. GARET et A. KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. ELLIPSES, 2011. ISBN : 9782729870409.
- [CG17] P. CALDERO et J. GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries Tome 1*. CALVAGE&MOUNET, 2017. ISBN : 9782916352619.
- [CG18] P. CALDERO et J. GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries Tome 2*. CALVAGE&MOUNET, 2018. ISBN : 9782916352671.
- [Gou21] X. GOURDON. *Les Maths en tête - Algèbre et probabilités - 3e édition*. ELLIPSES, 2021. ISBN : 9782340059597.
- [Rom21] J.E. ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. DEBOECK, 2021. ISBN : 9782807332201.
- [CP22] P. CALDERO et M. PERONNIER. *Carnet de voyage en Algèbre*. CALVAGE&MOUNET, 2022. ISBN : 9782493230034.