

Leçon 181 : Convexité dans $\mathbb{R}^n$. Applications en algèbre et en géométrie.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Barycentres.

1.1 Définitions et premières propriétés.

[Com21], VII.1

~ 5 items.

définition barycentre | $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum \alpha_i} \sum \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$ pour tout O | propriétés : homogénéité, commutativité, associativité | définition isobarycentre/centre de gravité | les médianes d'un triangle sont concourantes en le centre de gravité (dessin en annexe) | DEV bonus : suite de polygone (dessin en annexe)

Dbon

Théorème. Soit P un n -gone du plan complexe que l'on assimilera au n -uplet $(z_i) \in \mathbb{C}^n$ des affixes de ses sommets ordonnés. Pour $a, b > 0$ tels que $a + b = 1$, on notera $F_{a,b}(P)$ le n -gone (z'_i) où $z'_i = az_i + bz_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $z'_n = az_n + bz_1$.

1. Soit (P_k) la suite de n -gones définie par $P_0 = P$ et $P_{k+1} = F_{a,b}(P_k)$. Alors, (P_k) converge vers l'isobarycentre G de P .
2. Le résultat tient toujours si on a $P_{k+1} = F_{a_k,b_k}(P_k)$ avec $a_k, b_k > 0$, $a_k + b_k = 1$ et $\sum_k a_k b_k = +\infty$.

[CP22], I.3.4

1.2 Coordonnées barycentriques.

[Com21], VII.2-4 et [Eid09], I.2-5

~ 15 items.

: sous-espace affine $\Leftrightarrow$ stable par barycentres | fonction affine $\Leftrightarrow$ préserve les barycentres | définition repère affine | lien avec les repères cartésiens | exemple : vrai triangle | fonction affine définie par son image sur un repère affine (Combes): | : définition coordonnées barycentriques | exemple du centre de gravité | lien avec les coordonnées cartésiennes | équations barycentriques, polynômes homogènes | équation des droites | exemples dans le plan | parallélisme de droites | alignement de trois points | concours de 3 droites (Eiden):

1.3 Une application aux coniques.

[Eid09], II.2.1-2 et II.3

~ 5 items.

Théorème. 1. Soient A, B, C, D, E 5 points distincts du plan tels que 4 quelconques de ces points ne soient jamais alignés. Alors, il existe une unique conique $\mathcal{C}$ qui passe par ces 5 points. De plus, $\mathcal{C}$ est propre si et seulement si 3 quelconques de ces points ne sont jamais alignés.

2. (Théorème de Pascal) Soient A, B, C, A', B', C' 6 points distincts du plan, les 3 premiers n'étant pas alignés. Notons P l'intersection de (BC') et (CB') , Q l'intersection de (CA') et (AC') et R l'intersection de (AB') et (BA') . Alors, il existe une conique passant par les 6 points si et seulement si P, Q et R sont alignés.

[Eid09], II.2.2

Remarque : j'ai mis le théorème de Pascal pcq il est dar (si on fait tendre 2 points l'un vers l'autre, par exemple B' vers C , on obtient une méthode pour tracer la tangente d'une conique en un point en utilisant uniquement la règle!) mais en vrai je pense que le point 1 remplit déjà largement les 15 minutes.

2 Convexité.

2.1 Ensembles et fonctions convexes.

[BMP05], I.5.1-2

~ 10 items.

définition partie convexe | caractérisation par les barycentres à coeffs positifs | exemples : boules, intervalles de $\mathbb{R}$, solides de Platon, demi-espaces, ellipsoïdes (dessins en annexe) | DEV bonus : ellipsoïde de John-Loewner | convexe $\Rightarrow$ cpa | définition fonction convexe | caractérisation avec l'épigraphe | exemple : normes | inégalité de Jensen

Dbon

Théorème. Soit $q \in Q(\mathbb{R}^n)$ définie positive et $C \in \mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{E}_{q,C} := \{X \in \mathbb{R}^n, q(X - C) \leq 1\}$ l'ellipsoïde (pleine) associée à q centrée en C . Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compact d'intérieur non vide, alors :

1. à C fixé, il existe une unique ellipsoïde centrée en C contenant K de volume minimal;
2. il existe une unique ellipsoïde contenant K de volume minimal (centre non fixé).

[BB24], II.39 et III.14

Remarque : on n'a sûrement pas le temps de présenter le point 2 mais il est important de pouvoir répondre à des questions dessus.

2.2 Enveloppe convexe.

[Tau05], IV.3

~ 5 items.

intersection de convexes reste convexe | définition enveloppe convexe (dessin en annexe) | caractérisation par les barycentres | théorème de Gauss-Lucas | théorème de Carathéodory | corollaire : A compact $\Rightarrow \text{Conv}(A)$ aussi

2.3 Hyperplans d'appui.

[Tau05], IV.6-7

~ 5 items.

définition séparation (stricte) d'hyperplans | théorème de Hahn-Banach | application : DEV 2 |
définition hyperplan d'appui (dessin en annexe) | existence d'hyperplans d'appui pour les points de
la frontière | un convexe fermé est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent

D2

Théorème. Soit B la boule unité fermée pour la norme subordonnée à la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$. Alors, $B = \text{conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

[QZ20], VI.2.4, [BMP05], III.1.2 et [IP19], 26.

2.4 Points extrémaux.

[Tau05], IV.8

~ 5 items.

définition points extrémaux | caractérisations | théorème de Krein-Milman | exemple : DEV 2 partie
2 : $\text{Extr}(B) = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Références

- [BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ. *Objectif Agrégation*. H&K, 2005. ISBN : 9782914010924.
- [Tau05] P. TAUVEL. *Géométrie*. DUNOD, 2005. ISBN : 9782100494132.
- [Eid09] J.D. EIDEN. *Géométrie analytique classique*. CALVAGE&MOUNET, 2009. ISBN : 9782916352084.
- [IP19] L. ISENMANN et T. PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements - 2e édition*. ELLIPSES, 2019. ISBN : 9782340088306.
- [QZ20] H. QUEFFÉLEC et C. ZUILY. *Analyse pour l'agrégation*. DUNOD, 2020. ISBN : 9782100811809.
- [Com21] F. COMBES. *Algèbre et géométrie*. BRÉAL, 2021. ISBN : 9782749551630.
- [CP22] P. CALDERO et M. PERONNIER. *Carnet de voyage en Algèbre*. CALVAGE&MOUNET, 2022. ISBN : 9782493230034.
- [BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.