

Leçon 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Formes quadratiques réelles.

1.1 Généralités.

[Seg11], II.2-5

~ 10 items.

Suivre plus ou moins le de Seguin Pazzis sans refaire la partie sur les formes bilinéaires. Parler aussi de l'action $GL(E) \curvearrowright Q(E)$ pour voir les classes d'équivalence de f.q. comme des Orbites. Mettre des exemples (différentielle seconde...).

1.2 Objets associés à une forme quadratique.

[Seg11], III.1-5

~ 5-10 items.

Suivre à peu près le de Seguin Pazzis en gardant que les quelques objets utiles dans le cadre de la leçon (noyau, rang, cône isotrope, discriminant, groupe orthogonal) et la notion d'ellipsoïde.

Dbon

Théorème. Soit $q \in Q(\mathbb{R}^n)$ définie positive et $C \in \mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{E}_{q,C} := \{X \in \mathbb{R}^n, q(X - C) \leq 1\}$ l'**ellipsoïde (pleine)** associée à q centrée en C . Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compact d'intérieur non vide, alors :

1. à C fixé, il existe une unique ellipsoïde centrée en C contenant K de volume minimal;
2. il existe une unique ellipsoïde contenant K de volume minimal (centre non fixé).

[BB24], II.39 et III.14

Remarque : on n'a sûrement pas le temps de présenter le point 2 mais il est important de pouvoir répondre à des questions dessus.

2 Classification des formes quadratiques réelles.

2.1 Orthogonalité et algorithme de Gauss.

[Rom21], XV.2 et XV.3 et [Seg11], V.3

~ 10 items.

Parler rapidement de la notion d'orthogonalité et donner quelques propriétés (dimension de l'orthogonal, famille orthogonale de vecteurs anisotropes...) et quelques exemples. Donner le théorème de

diagonalisation, et l'algorithme de Gauss plutôt en annexe. Penser également à donner le théorème de diagonalisation simultanée.

2.2 Loi d'inertie de Sylvester.

[Rom21], XV.4

~ 5 items.

Donner le théorème d'inertie de Sylvester avec l'interprétation matricielle. Donner des exemples (formes définies positives, négatives, formes hyperboliques...).

D1

Théorème 1 (Lemme de Morse). *Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ avec $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ contenant 0. Supposons que 0 est un point critique non dégénéré de f et $\text{sign}(D^2f(0)) = (p, n - p)$. Alors, $\exists \varphi$ un difféomorphisme entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$ où $u = \varphi(x)$.*

[Rou15], V.5.66 et VI.3.144

3 Coniques.

3.1 Définition en coordonnées affines.

[Aud06], VII.1

~ 5-10 items.

Suivre le Audin sans faire la partie sur les intersection avec des droites et en rajoutant des exemples. Donner également la visualisation de la conique comme intersection d'un hyperplan et du cône isotrope de la forme homogénéisée (dessin en annexe).

3.2 Classifications euclidienne et affine.

[Aud06], VII.2

~ 5 items.

Suivre les deux premiers paragraphes de la partie dans le Audin. Faire des dessins en annexe.

3.3 Définition par foyer et directrice.

[Aud06], VII.2

~ 5 items.

Suivre les deux paragraphes suivants, encore une fois faire des dessins en annexe.

3.4 Définition en coordonnées barycentriques.

[Eid09], II.2-3

~ 5 items.

Suivre le Eiden. Rajouter quelques exemples (conique dégénérée formée de deux droites...)

D2

Théorème. 1. Soient A, B, C, D, E 5 points distincts du plan tels que 4 quelconques de ces points ne soient jamais alignés. Alors, il existe une unique conique $\mathcal{C}$ qui passe par ces 5 points. De plus, $\mathcal{C}$ est propre si et seulement si 3 quelconques de ces points ne sont jamais alignés.

2. (Théorème de Pascal) Soient A, B, C, A', B', C' 6 points distincts du plan, les 3 premiers n'étant pas alignés. Notons P l'intersection de (BC') et (CB') , Q l'intersection de (CA') et (AC') et R l'intersection de (AB') et (BA') . Alors, il existe une conique passant par les 6 points si et seulement si P, Q et R sont alignés.

[Eid09], II.2.2

Remarque : j'ai mis le théorème de Pascal pcq il est dar (si on fait tendre 2 points l'un vers l'autre, par exemple B' vers C , on obtient une méthode pour tracer la tangente d'une conique en un point en utilisant uniquement la règle!) mais en vrai je pense que le point 1 remplit déjà largement les 15 minutes.

Références

- [Aud06] M. AUDIN. *Géométrie*. EDP SCIENCES, 2006. ISBN : 9782868838834.
- [Eid09] J.D. EIDEN. *Géometrie analytique classique*. CALVAGE&MOUNET, 2009. ISBN : 9782916352084.
- [Seg11] C. de SEGUINS PAZZIS. *Invitation aux formes quadratiques*. CALVAGE&MOUNET, 2011. ISBN : 9782916352190.
- [Rou15] F. ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel*. CASSINI, 2015. ISBN : 9782842251864.
- [Rom21] J.E. ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. DEBOECK, 2021. ISBN : 9782807332201.
- [BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.