

Leçon 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Formes quadratiques en dimension finie.

1.1 Premières définitions.

[Seg11], II.1-3

~ 10 items.

définition forme bilinéaire | exemple : fg pour $f, g \in E^*$ | définition matrice dans une base, $b(x, y) = {}^tXMY$ | changement de base = congruence matricielle | définition symétrique/antisymétrique | définition forme quadratique | exemple : lien formes quadratiques/polynôme homogène | définition forme polaire | définition matrice dans une base, $q(x) = {}^tXMX$ | action $GL(E) \curvearrowright Q(E)$ par $u.q = q \circ u^{-1}$, formes quadratiques équivalentes

1.2 Quelques exemples de formes quadratiques.

[Seg11], II.4

~ 2 items.

coefficient devant X^{n-2} de χ_A | Hessienne

1.3 Objets associés à une forme quadratique.

[Seg11], III.2-6

~ 10-15 items.

définition noyau, rang | exemple de tXAX | définition forme quadratique non dégénérée | exemple : $\text{tr}(A^2)$ non dégénérée | définition cône isotrope | $\ker(q) \subseteq C(q)$ réciproque fautive en général | exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in C(\text{tr}(A^2))$ | définition vecteur isotrope, forme quadratique anisotrope | définition discriminant | rq : discriminant réduit | rang et discriminant : invariants | définition groupe orthogonal | définition groupe spécial orthogonal

2 Orthogonalité.

2.1 Notion d'orthogonalité.

[Seg11], IV.3

~ 5-10 items.

définition orthogonalité | exemple : $x \perp x \Leftrightarrow x \in C(q)$ | théorème de Pythagore | famille orthogonale de vecteurs anisotropes est libre | définition orthogonal d'une partie | dimension de l'orthogonal, condition pour qu'il soit en somme directe

2.2 Étude du groupe orthogonal.

[Seg11], VI.2.2 et XI

~ 5-10 items.

définition forme (définie) positive/négative | exemple : produit scalaire (dans la suite q = produit scalaire) | caractérisation isométries par les b.o.n. | exemple : symétries orthogonale | générateurs $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ | DEV 1 : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple | décomposition orthogonale | DEV bonus : enveloppe convexe $O_n(\mathbb{R})$

D1

Théorème. $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

[CP22], III.5

Dbon

Théorème. Soit B la boule unité fermée pour la norme subordonnée à la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$. Alors, $B = \text{conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

[QZ20], VI.2.4, [BMP05], III.1.2 et [IP19], 26.

3 Classification des formes quadratiques.

3.1 Théorème de réduction de Gauss.

[Seg11], V

~ 2 items.

critères équivalents de diagonalisation de f.q. | théorème d'existence de bases orthogonales (algorithme de Gauss en annexe)

3.2 Classification sur $\mathbb{C}$.

[Seg11], VI.1

~ 2 items.

classification, rang = invariant total | remarque : théorème reste vrai sur le corps des nombres constructibles

3.3 Classification sur $\mathbb{R}$.

[Seg11], VI.2

~ 3 items.

théorème d'inertie de Sylvester, caractérisation géométrique de la signature | signature = invariant total | DEV bonus : lemme de Morse

Dbon

Théorème (Lemme de Morse). Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ avec $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ contenant 0. Supposons que 0 est un point critique non dégénéré de f et $\text{sign}(D^2f(0)) = (p, n-p)$. Alors, $\exists \varphi$ un difféomorphisme entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$ où $u = \varphi(x)$.

[Rou15], V.5.66 et VI.3.144

3.4 Classification sur un corps fini.

[Per96], V.6 et [CG17], V.C

~ 5 items.

généralités sur les carrés dans un corps fini | théorème de classification des f.q. sur un corps fini |
définition symbole de Legendre | lemme : $|\{x \in \mathbb{F}_p, ax^2 = 1\}| = 1 + \left(\frac{a}{p}\right)$ | DEV 2 : réciprocity
quadratique

D2

Théorème. $\left(\frac{p}{p'}\right) \left(\frac{p'}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{p'-1}{2}}$

[CG17], V.C

Références

- [Per96] D. PERRIN. *Cours d'algèbre (Agrégation)*. ELLIPSES, 1996. ISBN : 9782729855529.
- [BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ. *Objectif Agrégation*. H&K, 2005. ISBN : 9782914010924.
- [Seg11] C. de SEGUINS PAZZIS. *Invitation aux formes quadratiques*. CALVAGE&MOUNET, 2011. ISBN : 9782916352190.
- [Rou15] F. ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel*. CASSINI, 2015. ISBN : 9782842251864.
- [CG17] P. CALDERO et J. GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries Tome 1*. CALVAGE&MOUNET, 2017. ISBN : 9782916352619.
- [IP19] L. ISENMANN et T. PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements - 2e édition*. ELLIPSES, 2019. ISBN : 9782340088306.
- [QZ20] H. QUEFFÉLEC et C. ZUILY. *Analyse pour l'agrégation*. DUNOD, 2020. ISBN : 9782100811809.
- [CP22] P. CALDERO et M. PERONNIER. *Carnet de voyage en Algérie*. CALVAGE&MOUNET, 2022. ISBN : 9782493230034.