

Leçon 162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Systèmes d'équations linéaires, étude théorique.

1.1 Généralités.

[Gri90], V et [Cia00], IV.1

1.2 Systèmes de Cramer.

[Gri90], V.2

1.3 Cas général, théorème de Rouché-Fontené.

[Gri90], V.3-4

2 Résolution pratique : méthode du pivot de Gauss.

2.1 Définitions.

[Rom19], V.3-4, [Gri90], II.1

2.2 Méthode du pivot de Gauss.

[Rom21], VI.1, [Rom19], V.5 et V.7, [Gri90], II.1 et [Cia00], IV.2

2.3 Applications en algèbre linéaire.

[Gri90], II.4 et III.9 et [Rom19], V.10

3 Applications.

3.1 En géométrie.

[Eid09], I.4-5 et II.1-2

D1

Théorème. 1. Soient A, B, C, D, E 5 points distincts du plan tels que 4 quelconques de ces points ne soient jamais alignés. Alors, il existe une unique conique $\mathcal{C}$ qui passe par ces 5 points. De plus, $\mathcal{C}$ est propre si et seulement si 3 quelconques de ces points ne sont jamais alignés.

2. (Théorème de Pascal) Soient A, B, C, A', B', C' 6 points distincts du plan, les 3 premiers n'étant pas alignés. Notons P l'intersection de (BC') et (CB') , Q l'intersection de (CA') et (AC') et R l'intersection de (AB') et (BA') . Alors, il existe une conique passant par les 6 points si et seulement si P, Q et R sont alignés.

[Eid09], II.2.2

Remarque : j'ai mis le théorème de Pascal pcq il est dar (si on fait tendre 2 points l'un vers l'autre, par exemple B' vers C , on obtient une méthode pour tracer la tangente d'une conique en un point en utilisant uniquement la règle!) mais en vrai je pense que le point 1 remplit déjà largement les 15 minutes.

3.2 En théorie des corps.

[Goz09], II.2 et [Les+20], 21

D2

Lemme. Si $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est une extension finie et $\mathbb{M}/\mathbb{K}$ une extension quelconque, alors $|\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{L}, \mathbb{M})| \leq [\mathbb{L} : \mathbb{K}]$.

Théorème (d'Artin). Si G est un sous-groupe fini de $\text{Aut}(\mathbb{K})$, alors $[\mathbb{K} : \mathbb{K}^G] \leq |G|$. En particulier, $G = \text{Aut}_{\mathbb{K}^G}(\mathbb{K})$ et l'inégalité précédente est en fait une égalité.

[Les+20], 21

Références

- [Gri90] J. GRIFONE. *Algèbre linéaire*. CÉPADUÈS, 1990. ISBN : 9782383951346.
- [Cia00] P. CIARLET. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. DUNOD, 2000. ISBN : 9782100041671.
- [Eid09] J.D. EIDEN. *Géométrie analytique classique*. CALVAGE&MOUNET, 2009. ISBN : 9782916352084.
- [Goz09] I. GOZARD. *Théorie de Galois : Niveau L3-M1*. ELLIPSES, 2009. ISBN : 9782729842772.
- [Rom19] J.E. ROMBALDI. *Analyse matricielle*. EDP SCIENCES, 2019. ISBN : 9782759823413.
- [Les+20] D. LESESVRE et al. *131 développements pour l'oral - Agrégation externe Mathématiques/Informatique*. DUNOD, 2020. ISBN : 9782100795567.
- [Rom21] J.E. ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. DEBOECK, 2021. ISBN : 9782807332201.