

# Leçon 161 : Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.

Matei Lefebvre

2025/2026

## 1 Distances dans un espace euclidien.

### 1.1 Définitions.

[Tau05], III.2 et III.3

~ 5 items.

Quelques définitions sur la distance dans un espace affine (entre deux points, à un espace...)

### 1.2 Orthogonalité.

[Rom21], XXII.1 et [Fre10], C.1.4

~ 5 items.

La référence ne fait pas vraiment ce qu'on veut pour cette partie mais globalement faut donner la définition d'orthogonalité, le théorème de Pythagore, la projection orthogonale et la distance à un sous-espace. (C'est un peu mieux dans le Rombaldi en fait.)

### 1.3 Matrice de Gram.

[Rom21], XVII.4.7 et [Gou21], V.3.3-4

~ 5 items.

Suivre le Rombaldi ou le Gourdon (l'inégalité de Hadamard n'est que dans le Gourdon).

## 2 Isométries.

### 2.1 Groupe orthogonal.

[Rom21], XXII.3-5

~ 10 items.

Suivre à peu près le Rombaldi.

Dbon

**Théorème.** Soit  $B$  la boule unité fermée pour la norme subordonnée à la norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors,  $B = \text{conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ .

[QZ20], VI.2.4, [BMP05], III.1.2 et [IP19], 26.

## 2.2 Isométries affines.

[Tau05], VI.1 et [Fre10], C.1.2.1

~ 5 items.

Suivre le Tauvel et rajouter la s.e.c.  $1 \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{E}) \rightarrow \text{Isom}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{O}(E) \rightarrow 1$  (plus ou moins dans le Fresnel : proposition 1.2.1.4).

## 2.3 Générateurs et classification.

[Fre10], C.1.2.2-3 et [Aud06], II.2, III.2 et V.1

~ 10 items.

Suivre le Fresnel pour le plan, peut-être regarder dans le Audin pour les formulations (mais faut un peu chercher dans différents chapitres). Mettre le tableau de classification en dimensions 2 et 3 en annexe (celui du Fresnel est pas ouf et dans le Audin c'est pas vraiment sous forme de tableau donc faut un peu tricoter).

## 2.4 Isométrie d'une partie.

[Rom21], III.4 et [CG18], XII.3

~ 5 items.

Suivre le Rombaldi pour le début puis le NH2G2 pour les solides platoniciens.

D1

**Théorème.** *Les groupes d'isométries du cube sont  $Is^+(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4$  et  $Is(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .*

[CG18], XII.3.5

**Remarque :** si on a le temps et l'espace, on peut aussi faire les groupes d'isométries du tétraèdre.

## 3 Notion d'angle.

### 3.1 Définitions.

[Aud06], III.1

~ 5 items.

Donner les définitions d'angles et la structure qui découle de celle de  $SO_2(\mathbb{R})$  (i.e. Chasles).

### 3.2 Mesure d'un angle.

[Aud06], III.1

~ 5 items.

Suivre le paragraphe "Orientations du plan et mesures des angles orientés". Rajouter aussi un ou deux théorème classiques sur les angles, y en a dans le dernier paragraphe de la partie et y a aussi le théorème d'Al-Kashi.

D2

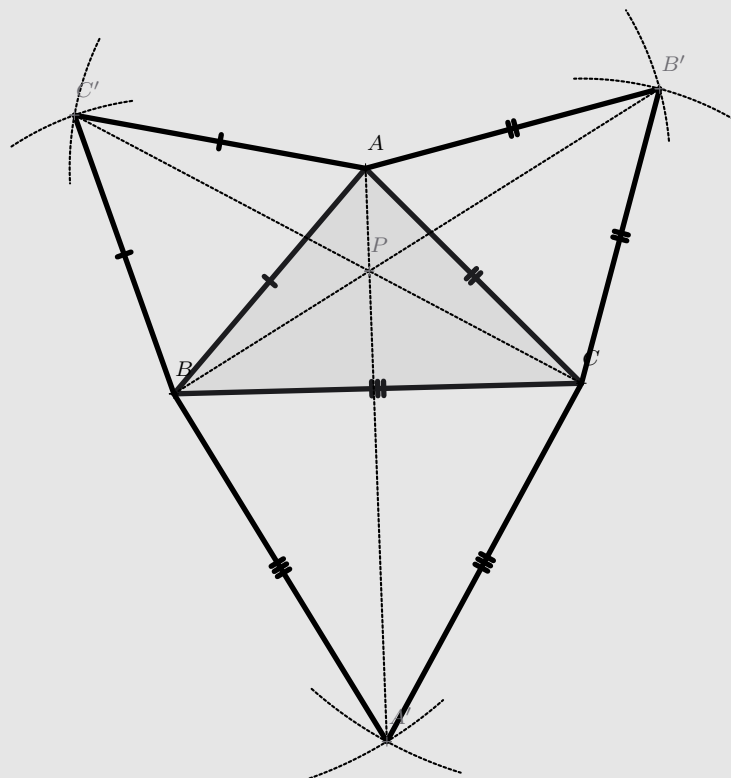
**Théorème** (Point de Fermat d'un triangle). *Soient  $A, B$  et  $C$  trois points non alignés de  $\mathbb{R}^2$  tels que les 3 angles du triangle  $ABC$  soient strictement inférieurs à  $\frac{2\pi}{3}$ .*

*Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Alors,*  
$$M \mapsto MA + MB + MC$$

1.  $f$  atteint son minimum en un unique point  $P$  (**point de Fermat** de  $ABC$ ), intérieur à  $ABC$  ;
2.  $P$  est caractérisé par  $\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = \frac{2\pi}{3}$  ;
3. On peut obtenir  $P$  par la construction géométrique suivante et on a  $f(P) = AA' = BB' = CC'$ .

[Rou15], VII.4.122

**Remarque :** développement beaucoup trop long, bien penser à choisir ce qu'on va dire selon la leçon.



**Remarque pour cette leçon :** Dans cette leçon il faut aller assez vite sur les techniques analytiques pour pouvoir parler de la caractérisation avec les angles.

### 3.3 Similitudes.

[Aud06], III.3

~ 5-10 items.

Suivre le Audin sauf peut-être ce qui prend trop de place (la construction du centre d'une similitude par exemple). Insister un peu plus sur le lien avec les fonctions holomorphes pcq c'est cool.

## Références

- [BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ. *Objectif Agrégation*. H&K, 2005. ISBN : 9782914010924.
- [Tau05] P. TAUVEL. *Géométrie*. DUNOD, 2005. ISBN : 9782100494132.
- [Aud06] M. AUDIN. *Géométrie*. EDP SCIENCES, 2006. ISBN : 9782868838834.
- [Fre10] J. FRESNEL. *Méthodes modernes en géométrie*. HERMANN, 2010. ISBN : 9782705670849.
- [Rou15] F. ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel*. CASSINI, 2015. ISBN : 9782842251864.

- [CG18] P. CALDERO et J. GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries Tome 2*. CALVAGE&MOUNET, 2018. ISBN : 9782916352671.
- [IP19] L. ISENMANN et T. PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements - 2e édition*. ELLIPSES, 2019. ISBN : 9782340088306.
- [QZ20] H. QUEFFÉLEC et C. ZUILY. *Analyse pour l'agrégation*. DUNOD, 2020. ISBN : 9782100811809.
- [Gou21] X. GOURDON. *Les Maths en tête - Algèbre et probabilités - 3e édition*. ELLIPSES, 2021. ISBN : 9782340059597.
- [Rom21] J.E. ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. DEBOECK, 2021. ISBN : 9782807332201.