

Leçon 158 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Espaces euclidiens.

1.1 Formes quadratiques et produit scalaire.

[Rom21], XV.1 et XXII.1

E evn de dim finie sur $\mathbb{R}$.

Def 1. forme quadratique, $q(x) = f(x, x)$ avec f bilinéaire, $Q(E)$.

Prop/Def 2. correspondance f.q. / f.b.l. sym (forme polaire).

Prop 3. action $GL(E) \curvearrowright Q(E)$ (*).

Th 4. inertie de Sylvester (forme normale + invariant total).

Def 5. produit scalaire (signature = $(n, 0)$), espace euclidien.

Ex 6. produits scalaires classiques.

dans la suite, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ p.s. et q la f.q. associée.

1.2 Orthogonalité.

[Rom21], XXII.1

Def 7. orthogonalité (angle).

Th 8. Pythagore.

Def 9. famille orthogonale, orthonormale.

Th 10. Gram-Schmidt.

Ex 11. polynômes orthogonaux.

Th 12. projection orthogonale.

Cor 13. TSO.

1.3 Adjoint d'un endomorphisme.

[Rom21], XXII.2

Prop/Def 14. adjoint u^* .

Ex 15. ex simple.

Prop 16. $\text{mat}(u^*) = {}^t \text{mat}(u)$ dans une bon.

Prop 17. propriétés de $*$ et de u^* (en particulier, F u -stable $\Rightarrow F^\perp$ u^* -stable).

2 Groupe orthogonal.

2.1 Généralités.

[Rom21], XXII.3

Def 18. $\mathcal{O}(q) = \text{Stab}(q)$ pour l'action $(*)$ ($\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ pour le p.s. can sur $\mathbb{R}^n$).

Prop 19. $\Leftrightarrow u^* = u^{-1}$.

Rq 20. $A \in \mathcal{O}_n \Leftrightarrow A^t A = I_n$.

Ex 21. symétrie orthogonale, projecteur orthogonal, exemples simples.

Rq 22. sous-groupe de $GL(E)$.

Prop 23. si $u : E \rightarrow E$ linéaire, $u \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow u$ préserve le p.s. $\Leftrightarrow$ envoie les bon sur des bon

Prop 24. F stable $\Rightarrow F^\perp$ stable.

Prop 25. dans une bon, $u \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow \text{mat}(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Th 26. $\mathcal{O}(E)$ est compact.

Prop 27. $\det(u) = \pm 1$.

Def 28. $\mathcal{O}^+(E)$.

Ex 29. en dim 2.

Prop 30. ss-grp fermé distingué d'ordre 2.

D1

Théorème 31. $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

[CP22], III.5

2.2 Réduction des endomorphismes orthogonaux.

[Rom21], XXII.4 et [Gri90], VII.10

Prop 32. $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subseteq \{\pm 1\}$.

Lemme 33. plan stable ou droite stable.

Th 34. réduction d'une isométrie, interprétation matricielle.

Ex 35. en dim 3, méthode de calcul de θ (c.f. Grifone).

Cor 36. composantes connexes de $\mathcal{O}(E)$ sont $\mathcal{O}^+(E)$ et $\mathcal{O}^-(E)$.

2.3 Symétries orthogonales.

[Rom21], XXII.5

Prop 37. symétrie orthogonale $\Leftrightarrow s \circ s = \text{id}$ et $s \in \mathcal{O}(E)$, en particulier forme normale dans une bon.

Def 38. réflexion orthogonale, retournement orthogonal.

Th 39. Cartan-Dieudonné.

Ex 40. rotation comme produit de deux réflexions.

Th 41. pareil pour $\mathcal{O}^+$ et les retournements.

3 Endomorphismes symétriques.

3.1 Théorème spectral.

[Rom21], XXII.6

Def 42. endomorphisme symétrique.

Prop 43. matrice symétrique dans bon.

Ex 44. ex simple.

Prop 45. $\dim \mathcal{S}(E) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Th 46. $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(u) \subseteq \mathbb{R}$.

Prop 47. les ss-esp propres sont orthogonaux.

Th 48. théorème spectral.

3.2 Spectre d'un endomorphisme symétrique, endomorphisme positifs.

[Rom21], XXII.8-9

Th 49. Courant-Fischer.

Cor 50. rayon spectral d'un endo quelconque.

Def 51. symétrique pos., sym def. pos.

Ex 52. ex simples.

Prop 53. caractérisation avec le spectre.

Th 54. existence d'une racine carré pour $u \in \mathcal{S}(E)$.

Rq 55. calcul fonctionnel.

Cor 56. décomposition polaire.

D2

Théorème 57. Soit B la boule unité fermée pour la norme subordonnée à la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$. Alors, $B = \text{conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

[QZ20], VI.2.4, [BMP05], III.1.2 et [IP19], 26.

4 (Endomorphismes normaux.)

[Rom21], XXII.10

Def 58. endo normal.

Ex 59. symétrique, anti-symétrique, orthogonal, similitude.

Lemme 60. F stable $\Rightarrow F^\perp$ stable.

Ex 61. en dim 2, si A n'a pas de vp, alors $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Th 62. réduction endo normal.

Références

- [Gri90] J. GRIFONE. *Algèbre linéaire*. CÉPADUÈS, 1990. ISBN : 9782383951346.
- [BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ. *Objectif Agrégation*. H&K, 2005. ISBN : 9782914010924.
- [IP19] L. ISENMANN et T. PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements - 2e édition*. ELLIPSES, 2019. ISBN : 9782340088306.
- [QZ20] H. QUEFFÉLEC et C. ZUILY. *Analyse pour l'agrégation*. DUNOD, 2020. ISBN : 9782100811809.
- [Rom21] J.E. ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. DEBOECK, 2021. ISBN : 9782807332201.
- [CP22] P. CALDERO et M. PERONNIER. *Carnet de voyage en Algèbre*. CALVAGE&MOUNET, 2022. ISBN : 9782493230034.