

Leçon 157 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Matrices symétriques et hermitiennes.

1.1 Généralités.

[Gri90], VII et VIII et [Seg11], I

1.2 Lien avec les endomorphismes.

[Gri90], VII

1.3 Lien avec les formes quadratiques et hermitiennes.

[Gri90], IX et X et [Seg11], II (parler du groupe orthogonal et unitaire)

1.4 Matrices positives et définies positives.

[Gri90], VII.13, IX.10 et X.5

2 Réduction.

2.1 Théorème spectral.

[Gri90], VII.13 et VIII.7

2.2 Réduction des formes quadratiques et hermitiennes.

[Gri90], IX.7-8 et X.3 et [Seg11], V

D1

Théorème (Lemme de Morse). Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ avec $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ contenant 0. Supposons que 0 est un point critique non dégénéré de f et $\text{sign}(D^2f(0)) = (p, n-p)$. Alors, $\exists \varphi$ un difféomorphisme entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$ où $u = \varphi(x)$.

[Rou15], V.5.66 et VI.3.144

2.3 Réduction simultanée et décomposition polaire.

[Gri90], IX.10 et X.5 et [CG17], VI.1

Dbon

Théorème. Soit B la boule unité fermée pour la norme subordonnée à la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$. Alors, $B = \text{conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

[QZ20], VI.2.4, [BMP05], III.1.2 et [IP19], 26.

3 Coniques et quadriques.

3.1 Généralités.

[Aud06], VII.1

3.2 Classification.

[Aud06], VII.2

D2

Théorème. Soit $q \in Q(\mathbb{R}^n)$ définie positive et $C \in \mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{E}_{q,C} := \{X \in \mathbb{R}^n, q(X - C) \leq 1\}$ l'**ellipsoïde (pleine)** associée à q centrée en C . Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compact d'intérieur non vide, alors :

1. à C fixé, il existe une unique ellipsoïde centrée en C contenant K de volume minimal ;
2. il existe une unique ellipsoïde contenant K de volume minimal (centre non fixé).

[BB24], II.39 et III.14

Remarque : on n'a sûrement pas le temps de présenter le point 2 mais il est important de pouvoir répondre à des questions dessus.

Références

- [Gri90] J. GRIFONE. *Algèbre linéaire*. CÉPADUÈS, 1990. ISBN : 9782383951346.
- [BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ. *Objectif Agrégation*. H&K, 2005. ISBN : 9782914010924.
- [Aud06] M. AUDIN. *Géométrie*. EDP SCIENCES, 2006. ISBN : 9782868838834.
- [Seg11] C. de SEGUINS PAZZIS. *Invitation aux formes quadratiques*. CALVAGE&MOUNET, 2011. ISBN : 9782916352190.
- [Rou15] F. ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel*. CASSINI, 2015. ISBN : 9782842251864.
- [CG17] P. CALDERO et J. GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries Tome 1*. CALVAGE&MOUNET, 2017. ISBN : 9782916352619.
- [IP19] L. ISENMANN et T. PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements - 2e édition*. ELLIPSES, 2019. ISBN : 9782340088306.
- [QZ20] H. QUEFFÉLEC et C. ZUILY. *Analyse pour l'agrégation*. DUNOD, 2020. ISBN : 9782100811809.
- [BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.