

Leçon 156 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Endomorphismes trigonalisables.

1.1 Définition et caractérisations.

[MM22], IX.1 et [Rom21], XXI.1

1.2 Trigonalisation simultanée.

[MM22], IX.2 et [Rom21], XXI.2

1.3 Aspects topologiques.

[CP22], III.4

2 Endomorphismes nilpotents.

2.1 Généralités.

[MM22], [Rom21] et [FGN18] (chercher un peu partout)

2.2 Noyaux itérés.

[FGN18], VI.14

D1

Théorème. Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $a(u) := \inf\{p \in \mathbb{N}, \ker(u^p) = \ker(u^{p+1})\}$ et $d(u) := \inf\{q \in \mathbb{N}, \operatorname{im}(u^q) = \operatorname{im}(u^{q+1})\}$. On a alors

$$a(u) = d(u) =: p, \quad E = \ker(u^p) \oplus \operatorname{im}(u^p), \quad u|_{\ker(u^p)} \text{ est nilpotent et } u|_{\operatorname{im}(u^p)} \text{ est inversible.}$$

De plus, une telle décomposition de E caractérise entièrement u .

Application. Il y a $q^{d(d-1)}$ matrices nilpotentes dans $M_d(\mathbb{F}_q)$.

[CP22], I.3.67

2.3 Cône nilpotent.

[MM22], XIII.2

3 Réduction des endomorphismes.

3.1 Réduction de Dunford.

[MM22], XI.1

D2

Théorème. Soit $\varphi : (\mathbb{S}^1, \cdot) \rightarrow (GL_n(\mathbb{R}), \times)$ un morphisme de groupes continu.

Alors, $\exists Q \in GL_n(\mathbb{R}), \exists r \in \mathbb{N}, \exists k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(e^{it}) = Q \begin{pmatrix} R_{tk_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R_{tk_r} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}, \text{ où } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

[FGN09], IV.29

3.2 Réduction de Jordan

[MM22], XI.2-4

Références

- [FGN09] S. FRANCINO, H. GIANELLA et S. NICOLAS. *Exercices de mathématiques : Oraux x-ens, algèbre 2*. CASSINI, 2009. ISBN : 9782842250911.
- [FGN18] S. FRANCINO, H. GIANELLA et S. NICOLAS. *Exercices de mathématiques : Oraux x-ens, algèbre 1*. CASSINI, 2018. ISBN : 9782842252113.
- [Rom21] J.E. ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. DEBOECK, 2021. ISBN : 9782807332201.
- [CP22] P. CALDERO et M. PERONNIER. *Carnet de voyage en Algèbre*. CALVAGE&MOUNET, 2022. ISBN : 9782493230034.
- [MM22] R. MANSUY et R. MNEIMNÉ. *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*. DEBOECK, 2022. ISBN : 9782807336612.