

Leçon 155 : Exponentielle de matrices. Applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Exponentielle de matrice.

1.1 Définitions et premières propriétés.

[MM22], XVI.1

1.2 Formules explicites.

[MM22], XVI.2-3

1.3 Liens avec la réduction de Dunford.

[MM22], XVI.4

D1

Théorème. Soit $\varphi : (\mathbb{S}^1, \cdot) \rightarrow (GL_n(\mathbb{R}), \times)$ un morphisme de groupes continu. Alors, $\exists Q \in GL_n(\mathbb{R}), \exists r \in \mathbb{N}, \exists k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(e^{it}) = Q \begin{pmatrix} R_{tk_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R_{tk_r} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}, \text{ où } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

[FGN09], IV.29

2 Propriétés de la fonction exponentielle sur $M_n(\mathbb{K})$.

2.1 Différentiabilité.

[Rou15], III.3.39

2.2 Injectivité et surjectivité.

[MM22], XVI.5

D2

Théorème. 1. $\forall A \in GL_n(\mathbb{C}), A \in \exp(\mathbb{C}[A])$. En particulier, $\exp : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective ;

2. $\exp(M_n(\mathbb{R})) = GL_n(\mathbb{R})^2$.

[IP19], 63 et [Zav13], III.9

2.3 Restriction à des sous-espaces de $M_n(\mathbb{K})$.

[CG17], VI.2

3 Application à la résolution d'équations différentielles.

[MM22], XVI.6

Références

- [FGN09] S. FRANCINO, H. GIANELLA et S. NICOLAS. *Exercices de mathématiques : Oraux x-ens, algèbre 2*. CASSINI, 2009. ISBN : 9782842250911.
- [Zav13] M. ZAVIDOVIQUE. *Un max de math*. CALVAGE&MOUNET, 2013. ISBN : 9782916352299.
- [Rou15] F. ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel*. CASSINI, 2015. ISBN : 9782842251864.
- [CG17] P. CALDERO et J. GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries Tome 1*. CALVAGE&MOUNET, 2017. ISBN : 9782916352619.
- [IP19] L. ISENMANN et T. PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements - 2e édition*. ELLIPSES, 2019. ISBN : 9782340088306.
- [MM22] R. MANSUY et R. MNEIMNÉ. *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*. DEBOECK, 2022. ISBN : 9782807336612.