

Leçon 152 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Diagonalisation.

1.1 Définitions et premières propriétés.

[MM22], VIII.1

1.2 Critères de diagonalisation.

[MM22], VIII.2-3

2 Exemples d'endomorphismes diagonalisables.

2.1 Endomorphismes symétriques.

[MM22], X.3

2.2 Sous-groupes finis de $GL(E)$.

[Szp+09], III.VII.1.5

D1

Théorème. Soit P un n -gone du plan complexe que l'on assimilera au n -uplet $(z_i) \in \mathbb{C}^n$ des affixes de ses sommets ordonnés. Pour $a, b > 0$ tels que $a + b = 1$, on notera $F_{a,b}(P)$ le n -gone (z'_i) où $z'_i = az_i + bz_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $z'_n = az_n + bz_1$.

1. Soit (P_k) la suite de n -gones définie par $P_0 = P$ et $P_{k+1} = F_{a,b}(P_k)$. Alors, (P_k) converge vers l'isobarycentre G de P .

2. Le résultat tient toujours si on a $P_{k+1} = F_{a_k,b_k}(P_k)$ avec $a_k, b_k > 0$, $a_k + b_k = 1$ et $\sum_k a_k b_k = +\infty$.

[CP22], I.3.4

3 Exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable.

[MM22], XVI.3

D2

Théorème. Soit $\varphi : (\mathbb{S}^1, \cdot) \rightarrow (GL_n(\mathbb{R}), \times)$ un morphisme de groupes continu.
Alors, $\exists Q \in GL_n(\mathbb{R}), \exists r \in \mathbb{N}, \exists k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(e^{it}) = Q \begin{pmatrix} R_{tk_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R_{tk_r} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}, \text{ où } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

[FGN09], IV.29

Références

- [FGN09] S. FRANCINO, H. GIANELLA et S. NICOLAS. *Exercices de mathématiques : Oraux x-ens, algèbre 2*. CASSINI, 2009. ISBN : 9782842250911.
- [Szp+09] A. SZPIRGLAS et al. *Mathématiques L3 : Algèbre*. PEARSON, 2009. ISBN : 9782744073519.
- [CP22] P. CALDERO et M. PERONNIER. *Carnet de voyage en Algèbre*. CALVAGE&MOUNET, 2022. ISBN : 9782493230034.
- [MM22] R. MANSUY et R. MNEIMNÉ. *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*. DE-BOECK, 2022. ISBN : 9782807336612.