

Leçon 151 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Sous-espaces stables.

1.1 Généralités.

[MM22], II.1-3

1.2 Exemples de sous-espaces stables.

[MM22], II.4 et IV et [FGN18], VI.14

D1

Théorème. Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $a(u) := \inf\{p \in \mathbb{N}, \ker(u^p) = \ker(u^{p+1})\}$ et $d(u) := \inf\{q \in \mathbb{N}, \operatorname{im}(u^q) = \operatorname{im}(u^{q+1})\}$. On a alors

$$a(u) = d(u) =: p, \quad E = \ker(u^p) \oplus \operatorname{im}(u^p), \quad u|_{\ker(u^p)} \text{ est nilpotent et } u|_{\operatorname{im}(u^p)} \text{ est inversible.}$$

De plus, une telle décomposition de E caractérise entièrement u .

Application. Il y a $q^{d(d-1)}$ matrices nilpotentes dans $M_d(\mathbb{F}_q)$.

[CP22], I.3.67

1.3 Sous-espaces cycliques.

[MM22], II.5 et VI

1.4 Sous-espaces stables par une famille d'endomorphismes.

[MM22], VIII.3

2 Applications.

2.1 Endomorphismes semi-simples.

[Gou21], IV.5.Problème 22

D2

Théorème. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et μ_f son polynôme minimal. Alors, f est semi-simple si et seulement si μ_f n'a pas de facteur carré.

[Gou21], IV.5.Problème 22

2.2 Réduction des endomorphismes.

[MM22], VIII et XI

2.3 Réduction de Frobenius.

[MM22], VI et XII

Références

- [FGN18] S. FRANCINO, H. GIANELLA et S. NICOLAS. *Exercices de mathématiques : Oraux x-ens, algèbre 1*. CASSINI, 2018. ISBN : 9782842252113.
- [Gou21] X. GOURDON. *Les Maths en tête - Algèbre et probabilités - 3e édition*. ELLIPSES, 2021. ISBN : 9782340059597.
- [CP22] P. CALDERO et M. PERONNIER. *Carnet de voyage en Algèbre*. CALVAGE&MOUNET, 2022. ISBN : 9782493230034.
- [MM22] R. MANSUY et R. MNEIMNÉ. *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*. DEBOECK, 2022. ISBN : 9782807336612.