

Leçon 150 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Sous-espaces stables et polynômes d'endomorphismes.

1.1 Sous-espaces stables.

[MM22], II

1.2 L'algèbre $\mathbb{K}[u]$.

[MM22], I.1-2 et IV

1.3 Polynômes annulateurs.

[MM22], I.3-4

1.4 Polynôme caractéristique.

[MM22], V.2

1.5 Endomorphismes semi-simples.

[Gou21], IV.5.Problème 22

D1

Théorème. *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et μ_f son polynôme minimal. Alors, f est semi-simple si et seulement si μ_f n'a pas de facteur carré.*

[Gou21], IV.5.Problème 22

2 Réduction d'un endomorphisme.

2.1 Diagonalisation.

[MM22], V.1 et VIII

Dbon

Théorème. Soit P un n -gone du plan complexe que l'on assimilera au n -uplet $(z_i) \in \mathbb{C}^n$ des affixes de ses sommets ordonnés. Pour $a, b > 0$ tels que $a + b = 1$, on notera $F_{a,b}(P)$ le n -gone (z'_i) où $z'_i = az_i + bz_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $z'_n = az_n + bz_1$.

1. Soit (P_k) la suite de n -gones définie par $P_0 = P$ et $P_{k+1} = F_{a,b}(P_k)$. Alors, (P_k) converge vers l'isobarycentre G de P .
2. Le résultat tient toujours si on a $P_{k+1} = F_{a_k,b_k}(P_k)$ avec $a_k, b_k > 0$, $a_k + b_k = 1$ et $\sum_k a_k b_k = +\infty$.

[CP22], I.3.4

2.2 Trigonalisation, réduction de Dunford.

[MM22], IX et XI.1

3 Applications.

3.1 Exponentielle de matrice.

[MM22], XVI

D2

Théorème. 1. $\forall A \in GL_n(\mathbb{C}), A \in \exp(\mathbb{C}[A])$. En particulier, $\exp : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective ;

2. $\exp(M_n(\mathbb{R})) = GL_n(\mathbb{R})^2$.

[IP19], 63 et [Zav13], III.9

3.2 Suite des noyaux itérés, décomposition de Fitting.

[FGN18], VI.14 et [CP22], I.3.67

Dbon

Théorème. Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $a(u) := \inf\{p \in \mathbb{N}, \ker(u^p) = \ker(u^{p+1})\}$ et $d(u) := \inf\{q \in \mathbb{N}, \operatorname{im}(u^q) = \operatorname{im}(u^{q+1})\}$. On a alors

$$a(u) = d(u) =: p, \quad E = \ker(u^p) \oplus \operatorname{im}(u^p), \quad u|_{\ker(u^p)} \text{ est nilpotent et } u|_{\operatorname{im}(u^p)} \text{ est inversible.}$$

De plus, une telle décomposition de E caractérise entièrement u .

Application. Il y a $q^{d(d-1)}$ matrices nilpotentes dans $M_d(\mathbb{F}_q)$.

[CP22], I.3.67

Références

[Zav13] M. ZAVIDOVIQUE. *Un max de math.* CALVAGE&MOUNET, 2013. ISBN : 9782916352299.

- [FGN18] S. FRANCINO, H. GIANELLA et S. NICOLAS. *Exercices de mathématiques : Oraux x-ens, algèbre 1*. CASSINI, 2018. ISBN : 9782842252113.
- [IP19] L. ISENMANN et T. PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements - 2e édition*. ELLIPSES, 2019. ISBN : 9782340088306.
- [Gou21] X. GOURDON. *Les Maths en tête - Algèbre et probabilités - 3e édition*. ELLIPSES, 2021. ISBN : 9782340059597.
- [CP22] P. CALDERO et M. PERONNIER. *Carnet de voyage en Algèbre*. CALVAGE&MOUNET, 2022. ISBN : 9782493230034.
- [MM22] R. MANSUY et R. MNEIMNÉ. *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*. DEBOECK, 2022. ISBN : 9782807336612.