

Leçon 149 : Déterminant. Exemples et applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Construction du déterminant.

1.1 Formes multilinéaires alternées.

[Gou21], III.5.1 et [Rom21], XVII.1

~ 5 items.

Suivre plutôt le Gourdon mais les deux sont bien. Pas la peine de s'attarder ici avec des exemples et tout.

1.2 Déterminant d'une famille de vecteurs.

[Gou21], III.5.2 et [Rom21], XVII.2

~ 5 items.

Pareil.

1.3 Déterminant d'un endomorphisme.

[Gou21], III.5.2 et [Rom21], XVII.2

~ 3 items.

Pareil.

1.4 Déterminant d'une matrice carrée.

[Gou21], III.5.2 et [Rom21], XVII.2

~ 3 items.

Pareil, sans trop parler des propriétés pratiques dont on parlera plutôt dans la partie suivante. Faire le lien avec les endomorphismes.

2 Propriétés du déterminant.

2.1 Calcul pratique d'un déterminant.

[Gou21], III.5.2 et [Rom21], XVII.3

~ 5-10 items. Pareil. Remarquer que les propriétés de base sur les endomorphismes sont conservées pour les matrices (multilinéarité, anti-symétrie...). Donner également les propriétés caractéristiques liées aux matrices (déterminants par blocs, de la transposée...) et les formules en dimension 2 et 3. Parler également du développement selon une ligne/colonne et de la formule avec la comatrice. En application, déterminant dans un anneau intègre de caractéristique différente de 2.

2.2 Quelques exemples de calculs de déterminants.

[Gou21], III.5.2 et III.5.4 et [Rom21], XVII.4.3 et XVII.5

~ 5 items.

Piocher quelques exemples (au moins 3).

Dbon

Théorème. Soit P un n -gone du plan complexe que l'on assimilera au n -uplet $(z_i) \in \mathbb{C}^n$ des affixes de ses sommets ordonnés. Pour $a, b > 0$ tels que $a + b = 1$, on notera $F_{a,b}(P)$ le n -gone (z'_i) où $z'_i = az_i + bz_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $z'_n = az_n + bz_1$.

1. Soit (P_k) la suite de n -gones définie par $P_0 = P$ et $P_{k+1} = F_{a,b}(P_k)$. Alors, (P_k) converge vers l'isobarycentre G de P .
2. Le résultat tient toujours si on a $P_{k+1} = F_{a_k,b_k}(P_k)$ avec $a_k, b_k > 0$, $a_k + b_k = 1$ et $\sum_k a_k b_k = +\infty$.

[CP22], I.3.4

??????????????

2.3 Méthode du Pivot de Gauss.

[Rom21], VI.1 et [Gri90], II

~ 3 items.

Admettre la méthode du pivot de Gauss et en déduire le déterminant d'une matrice quelconque (facile à calculer pour des matrices échelonnées et des matrices élémentaires). Faire une remarque sur la complexité de l'opération (en $O(n^3)$, ce qui est pas mal pour une implémentation numérique). On n'a pas vraiment besoin des références puisqu'on admet ici la méthode et qu'on ne donne pas les techniques mais elles peuvent être utiles si jamais il y a des questions.

2.4 Propriétés analytiques.

[Rou15], II.3.26 et [BB24], II.39 et III.14

~ 5-10 items.

Déterminant est $\mathcal{C}^\infty$, donner sa différentielle et en application l'équation différentielle vérifiée par le Wronskien (suivre l'exo du Rouvière). Donner ensuite la propriété de stricte log-concavité du déterminant sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$ et le dev en application.

D1

Théorème. Soit $q \in Q(\mathbb{R}^n)$ définie positive et $C \in \mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{E}_{q,C} := \{X \in \mathbb{R}^n, q(X - C) \leq 1\}$ l'ellipsoïde (pleine) associée à q centrée en C . Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compact d'intérieur non vide, alors :

1. à C fixé, il existe une unique ellipsoïde centrée en C contenant K de volume minimal ;
2. il existe une unique ellipsoïde contenant K de volume minimal (centre non fixé).

[BB24], II.39 et III.14

Remarque : on n'a sûrement pas le temps de présenter le point 2 mais il est important de pouvoir répondre à des questions dessus.

3 Applications.

3.1 En algèbre linéaire.

[MM22], V.2

~ 5 items.

Définition du polynôme caractéristique (peut-être faire une remarque sur le déterminant sur un anneau quelconque). Coefficient constant et formule en dimension 2. Déterminant = produit des valeurs propres dans $\mathbb{C}$.

3.2 En géométrie.

[Rom21], XVII.4.7 et [Eid09], I.5 et II.2.2

~ 5-10 items.

Interprétation du déterminant comme le volume du pavé droit engendré par les x_i . Déterminant de Gram, application pour le calcul de la distance à un sev (Rombaldi). Condition d'alignement de 3 points et de concours de trois droites dans le plan en coordonnées barycentriques (Eiden).

D2

Théorème. 1. Soient A, B, C, D, E 5 points distincts du plan tels que 4 quelconques de ces points ne soient jamais alignés. Alors, il existe une unique conique $\mathcal{C}$ qui passe par ces 5 points. De plus, $\mathcal{C}$ est propre si et seulement si 3 quelconques de ces points ne sont jamais alignés.

2. (Théorème de Pascal) Soient A, B, C, A', B', C' 6 points distincts du plan, les 3 premiers n'étant pas alignés. Notons P l'intersection de (BC') et (CB') , Q l'intersection de (CA') et (AC') et R l'intersection de (AB') et (BA') . Alors, il existe une conique passant par les 6 points si et seulement si P, Q et R sont alignés.

[Eid09], II.2.2

Remarque : j'ai mis le théorème de Pascal pcq il est dar (si on fait tendre 2 points l'un vers l'autre, par exemple B' vers C , on obtient une méthode pour tracer la tangente d'une conique en un point en utilisant uniquement la règle!) mais en vrai je pense que le point 1 remplit déjà largement les 15 minutes.

3.3 En analyse.

[Can09], IV.2

~ 3 items.

Formule du changement de variable, application à l'intégrale de Gauss.

Références

- [Gri90] J. GRIFONE. *Algèbre linéaire*. CÉPADUÈS, 1990. ISBN : 9782383951346.
- [Can09] B. CANDELPERGHIER. *Calcul intégral*. CASSINI, 2009. ISBN : 9782842250539.
- [Eid09] J.D. EIDEN. *Géométrie analytique classique*. CALVAGE&MOUNET, 2009. ISBN : 9782916352084.
- [Rou15] F. ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel*. CASSINI, 2015. ISBN : 9782842251864.
- [Gou21] X. GOURDON. *Les Maths en tête - Algèbre et probabilités - 3e édition*. ELLIPSES, 2021. ISBN : 9782340059597.

- [Rom21] J.E. ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. DEBOECK, 2021. ISBN : 9782807332201.
- [CP22] P. CALDERO et M. PERONNIER. *Carnet de voyage en Algérie*. CALVAGE&MOUNET, 2022. ISBN : 9782493230034.
- [MM22] R. MANSUY et R. MNEIMNÉ. *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*. DEBOECK, 2022. ISBN : 9782807336612.
- [BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.