

Leçon 148 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

E, F et G seront des $\mathbb{K}$ -ev avec $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

1 Bases et dimension.

([Gri90], [Gou21])

1.1 Familles libres et génératrices.

Définition 1. Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E est dite **génératrice** lorsque tout élément de E s'écrit comme une combinaison linéaire des x_i .

Exemple 2. $((1, 0), (1, 2), (2, 2))$ génère $\mathbb{R}^2$.

Proposition/Définition 3. Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E est dite **libre** lorsqu'elle vérifie l'une des deux propositions équivalentes suivantes :

1. $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.
2. aucun des x_i n'est combinaison linéaire des autres.

Dans le cas contraire, on dit que la famille est **liée**.

Exemple 4. $((2, 0), (1, 1))$ est libre dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition 5. Toute sous-famille d'une famille libre est libre, toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

Théorème 6. Si $(x_1, \dots, x_n)$ génère E et $(y_1, \dots, y_{n+1}) \in E^{n+1}$, alors $(y_1, \dots, y_{n+1})$ est liée.

Définition 7. Une famille β de E est une **base** de E lorsqu'elle est libre et génératrice.

Exemple 8. • La famille de l'exemple 4 est une base de $\mathbb{R}^2$;

- $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Proposition 9. Soient $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{G}$ deux familles finies de E avec $\mathcal{L}$ libre et $\mathcal{G}$ génératrice. Alors, il existe β base de E telle que $\mathcal{L} \subseteq \beta \subseteq \mathcal{G}$.

Remarque 10. En particulier, si E est généré par un nombre fini d'éléments, alors on peut extraire des bases des familles génératrices finies (base extraite) et on peut compléter les familles libres finies en des bases de E (base incomplète).

1.2 Dimension d'un espace vectoriel.

Définition 11. E est dit de **dimension finie** lorsqu'il est généré par un nombre fini d'éléments. Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

Proposition/Définition 12. Si E est de dimension finie, alors E admet au moins une base et toutes les bases de E sont de même cardinal n . On note $\dim E := n$ (ou $\dim_{\mathbb{K}} E$) et on l'appelle la **dimension** de E .

Proposition 13. Si E est de dimension finie n et $\beta = (x_1, \dots, x_n)$ une famille d'éléments de E , alors : β libre $\Leftrightarrow \beta$ génératrice $\Leftrightarrow \beta$ base.

Exemple 14. Si $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{K}_n[X]$ avec $\deg P_k = k$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, alors $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Remarque 15. Un des avantages principaux du fait de travailler en dimension finie est la possibilité d'utiliser le principe de récurrence pour faire des preuves.

Dans la suite de cette partie, on suppose E, F de dimensions finies respectives $n, m \in \mathbb{N}$.

Proposition 16. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces de E . Alors $\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)$.

Corollaire 17. ASSE :

1. $E = E_1 \oplus E_2$;
2. $n = \dim(E_1) + \dim(E_2)$ et $E_1 \cap E_2 = \{0\}$;
3. $n = \dim(E_1) + \dim(E_2)$ et $E = E_1 + E_2$.

Proposition 18. • $\dim(E \times F) = n + m$;
• $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = nm$

2 Rang.

([Gri90],[Gou21],[Cia00])

2.1 Familles de vecteurs et applications linéaires.

Définition 19. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . Le **rang** de $(x_i)_{i \in I}$ est la dimension de $\text{Vect}(x_i, i \in I)$. On le note $\text{rg}(x_i, i \in I)$.

Exemple 20. $\text{rg}((1, 0, 0); (0, 1, 0); (1, 1, 0)) = 2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Proposition 21. Si I est fini alors $\text{rg}(x_i, i \in I) \leq |I|$ avec égalité ssi $(x_i)_{i \in I}$ est libre.

Définition 22. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle **rang** de f , noté $\text{rg}(f)$, la dimension du sev $f(E)$ de F .

Exemple 23. Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, alors $\text{rg}(f) = 2$.
 $(x, y, z) \mapsto (x - y, x - z, y - z)$

Théorème 24 (du rang). Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si S est un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E , alors f induit un isomorphisme $S \xrightarrow{\sim} f(E)$. En particulier, si $\dim(E) < +\infty$, alors f est de rang fini et $\text{rg}(f) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$.

Corollaire 25. Si $n = m$, alors f bijective $\Leftrightarrow f$ injective $\Leftrightarrow f$ surjective.

Contre-exemple 26. Dans $\mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P'$ est surjective non injective et $P \mapsto XP$ est injective non surjective.

Proposition 27. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$.

2.2 Matrices.

Définition 28. Soit $M \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, on appelle **rang** de M , noté $\text{rg}(M)$, le rang de l'endomorphisme $u_M : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ canoniquement associé.

Proposition 29. Notons $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{K}^m$ les colonnes de M et $L_1, \dots, L_m \in \mathbb{K}^n$ les lignes de M . Alors, $\text{rg}(M) = \text{rg}(C_1, \dots, C_n) = \text{rg}(L_1, \dots, L_m)$. En particulier, $\text{rg}(M) \leq \min(m, n)$.

Remarque 30. Cette proposition est une conséquence immédiate du corollaire 39 qui arrive plus tard.

Définition 31. Soit $M \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $L_1, \dots, L_m$ ses lignes. Si L_i est non nulle, on appelle **pivot** de la ligne L_i le coefficient non nul le plus à gauche sur L_i .

On dira que M est **échelonnée réduite par lignes** lorsque :

- Toutes les lignes nulles de M sont situées en bas.
- Les pivots des lignes non nulles sont égaux à 1.
- Si L_i est une ligne non nulle avec $i \geq 2$, alors le pivot de L_{i-1} est situé strictement à gauche de celui de L_i .
- Les coefficients situés au dessus d'un pivot sont tous nuls.

Exemple 32. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée réduite selon les lignes.

Remarque 33. Il est facile de calculer $\ker(u_M)$ lorsque M est une matrice échelonnée réduite selon les lignes en regardant les colonnes ne contenant pas de pivot. Dans l'exemple précédent, on a $\ker(u_M) = \text{Vect}(e_1, e_3 - 2e_2, e_5 - e_2 - e_4)$ où $(e_1, \dots, e_5)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^5$.

Définition 34. Deux matrices sont dites **équivalentes par lignes** lorsque l'on peut passer de l'une à l'autre par des opérations élémentaires sur les lignes.

Proposition 35. Si M et M' sont équivalentes par lignes, alors $\ker(u_M) = \ker(u_{M'})$ et donc $\text{rg}(M) = \text{rg}(M')$.

Proposition 36 (Pivot de Gauss). L'algorithme suivant permet de transformer $M \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ en une matrice échelonnée réduite selon les lignes via des opérations élémentaires sur les lignes (en particulier, M est équivalente par lignes à la matrice obtenue au final).

1. M s'écrit par blocs $M = \left(\begin{array}{c|c} M_1 & * \\ \hline 0 & M_2 \end{array} \right)$ avec M_1 une matrice échelonnée réduite selon les lignes (initialement, on prend M_1 la matrice vide que l'on considère échelonnée réduite selon les lignes par convention). Si M_2 est nulle ou vide, l'algorithme est fini. Sinon, on écrit $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_i^{(2)} & -C_k^{(2)} \end{pmatrix}$ avec $C_i^{(2)}$ une colonne non nulle.
2. Notons m_1 le nombre de lignes de M_1 , on permute les lignes de M d'indice $> m_1$ pour ramener un coefficient non nul $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ de $C_i^{(2)}$ sur la ligne $m_1 + 1$. On multiplie ensuite cette ligne par λ^{-1} pour obtenir un 1 au croisement de la colonne $C_i^{(2)}$ et de la ligne $m_1 + 1$. On retranche enfin un certain multiple de la ligne $m_1 + 1$ à toutes les autres lignes pour annuler les coefficients sur la colonne contenant $C_i^{(2)}$ (ces opérations n'ont aucun effet sur les colonnes à gauche de M_2). On a alors obtenu une nouvelle matrice M' équivalente par lignes à M de la forme

$$M' = \left(\begin{array}{c|c|c} M_1 & \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} & * \\ \hline 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & M_2' \end{array} \right). \text{ On retourne alors en i. avec cette nouvelle forme.}$$

Exemple 37. *Pivot de Gauss en annexe.*

Proposition/Définition 38. *Deux matrices $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ sont dites **équivalentes** lorsqu'il existe $P \in GL_m(\mathbb{K}), Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ$. C'est une relation d'équivalence sur $M_{m,n}(\mathbb{K})$.*

Proposition 39. *Si $\text{rg}(M) = r$, alors M est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. En particulier, le rang est un invariant total pour la relation d'équivalence qu'on vient de définir.*

Corollaire 40. $\text{rg}(M) = \text{rg}(^t M)$

Définition 41. *Soient $M \in M_{m,n}(\mathbb{K}), I \subseteq \llbracket 1; m \rrbracket, J \subseteq \llbracket 1; n \rrbracket$. La **matrice extraite associée** est $M_{I,J} := (m_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$.*

Proposition 42. *Le rang de M est égal à la taille maximale d'une matrice extraite carrée inversible.*

3 Applications.

3.1 Dualité.

([Gri90], [Gou21])

(Il faut peut-être enlever cette partie pour gagner un peu de place)

On suppose que E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 43. *Le **dual** de E est l'espace $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E , on le note E^* .*

Proposition/Définition 44. *Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , on définit la famille de formes linéaires $(e_1^*, \dots, e_n^*) \in (E^*)^n$ par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est alors une base de E^* , on l'appelle **base duale** de $(e_1, \dots, e_n)$.*

Corollaire 45. $\dim(E^*) = \dim(E)$

Exemple 46. *La base duale de $(1, \dots, X^n)$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ est $(P \mapsto \frac{P^{(k)}(0)}{k!}, k \in \llbracket 0; n \rrbracket)$. Dans $\mathbb{R}[X]^*$, la famille $(P \mapsto \frac{P^{(k)}(0)}{k!}, k \in \mathbb{N})$ est toujours libre mais pas génératrice : $(P \mapsto P(1)) \notin \text{Vect}(P \mapsto \frac{P^{(k)}(0)}{k!}, k \in \mathbb{N})$.*

Théorème 47. *Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$ avec $\text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) = r$, alors $\dim \left(\bigcap_{i=1}^p \ker(\varphi_i) \right) = n - r$. Réciproquement, si F est un sev de dimension $n - r$ de E , alors il existe $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in E^*$ linéairement indépendantes tq $F = \bigcap_{i=1}^r \ker(\varphi_i)$.*

Corollaire 48. *L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n lignes et m inconnues et de dimension au moins $m - n$.*

3.2 Extensions de corps.

([Goz09])

Définition 49. *Soient $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ deux corps. On dit que $\mathbb{L}$ est une extension de $\mathbb{K}$ lorsqu'on a une injection $\mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{L}$. On note alors $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ pour signifier que $\mathbb{K}$ peut alors être vu comme un sous-corps de $\mathbb{L}$.*

Définition 50. *Le **degré** de l'extension $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est la dimension de $\mathbb{L}$ en tant que $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On le note $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$. On dit que l'extension $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est **finie** lorsque $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ est fini.*

Théorème 51 (Base télescopique). *Supposons que $\mathbb{M}/\mathbb{L}$ et $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ soient deux extensions finies avec $(y_1, \dots, y_m)$ une $\mathbb{L}$ -base de $\mathbb{M}$ et $(x_1, \dots, x_l)$ une $\mathbb{K}$ -base de $\mathbb{L}$. Alors, $(x_i y_j)_{(i,j) \in [1;l] \times [1;m]}$ est une $\mathbb{K}$ -base de $\mathbb{M}$. En particulier, $[\mathbb{M} : \mathbb{K}] = [\mathbb{M} : \mathbb{L}][\mathbb{L} : \mathbb{K}]$.*

Définition 52. *Soit $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une extension de corps et $x \in \mathbb{L}$. On dit que x est **algébrique** sur $\mathbb{K}$ lorsqu'il existe $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(x) = 0$. $\{P \in \mathbb{K}[X], P(x) = 0\}$ est alors un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$ qui est donc engendré par un unique polynôme unitaire $\mu_{x,\mathbb{K}}$. Le polynôme $\mu_{x,\mathbb{K}}$ est appelé **polynôme minimal** de x sur $\mathbb{K}$.*

Proposition 53. *Soit $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une extension de corps et $x \in \mathbb{L}$. Alors, x est algébrique sur $\mathbb{K}$ ssi $[\mathbb{K}(x) : \mathbb{K}] < \infty$. Dans ce cas, on a $[\mathbb{K}(x) : \mathbb{K}] = \deg(\mu_{x,\mathbb{K}})$.*

Proposition 54. *Soit $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une extension de corps. L'ensemble des nombres algébriques sur $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{L}$ est un corps.*

Proposition/Définition 55. *Soit $\mathbb{K}$ un corps et G un sous-groupe de l'ensemble $\text{Aut}(\mathbb{K})$ des automorphismes de corps de $\mathbb{K}$. On note $\mathbb{K}^G := \{x \in \mathbb{K}, \forall g \in G, g(x) = x\}$. $\mathbb{K}^G$ est alors un sous-corps de $\mathbb{K}$, on l'appelle **corps fixe** de G .*

Proposition/Définition 56. *Soient $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ et $\mathbb{M}/\mathbb{K}$ deux extensions de corps. On note $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{L}, \mathbb{M}) := \{f \in \text{Hom}(\mathbb{L}, \mathbb{M}), \forall x \in \mathbb{K}, f(x) = x\}$. Si $\mathbb{L} = \mathbb{M}$, on note $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{L}) := \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{L}, \mathbb{L})$ et $\text{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{L}) := \text{Aut}(\mathbb{K}) \cap \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{L})$. Ce dernier ensemble est un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbb{L})$.*

D1

Lemme 57. *Si $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est une extension finie et $\mathbb{M}/\mathbb{K}$ une extension quelconque, alors $|\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{L}, \mathbb{M})| \leq [\mathbb{L} : \mathbb{K}]$.*

Théorème 58 (d'Artin). *Si G est un sous-groupe fini de $\text{Aut}(\mathbb{K})$, alors $[\mathbb{K} : \mathbb{K}^G] \leq |G|$. En particulier, $G = \text{Aut}_{\mathbb{K}^G}(\mathbb{K})$ et l'inégalité précédente est en fait une égalité.*

[Les+20], 21

3.3 Polynômes et corps finis.

([Goz09] [Rom21])

Soit $\mathbb{K}$ un corps.

Définition 59. *On appelle **sous-corps premier** de $\mathbb{K}$ le plus petit sous-corps de $\mathbb{K}$ et on le note $\mathbb{K}_0$.*

Proposition/Définition 60. $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K}$ est un morphisme d'anneau. Son noyau est de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n = 0$ ou $n \in \mathcal{P}$. On note $n = \text{car}(\mathbb{K})$ et on l'appelle la **caractéristique** de $\mathbb{K}$. On dit que $\mathbb{K}$ est de **caractéristique non nulle** lorsque $n = p \in \mathcal{P}$. De plus, φ induit un isomorphisme $\bar{\varphi} : \text{Frac}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}_0$.

Proposition 61. *Si $|\mathbb{K}| < \infty$, alors :*

1. $\text{car}(\mathbb{K}) = p \in \mathcal{P}$ et donc $\mathbb{K}_0 \simeq \mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$;
2. $|\mathbb{K}| = p^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 62. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Un **corps de décomposition** de P sur $\mathbb{K}$ est une extension $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ telle que P soit scindé sur $\mathbb{L}$ et $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les racines de P dans $\mathbb{L}$.*

Théorème 63. *Il existe un corps de décomposition de P sur $\mathbb{K}$, unique à $\mathbb{K}$ -isomorphisme près. On le note $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}(P)$ et on a $[\mathcal{D}_{\mathbb{K}}(P) : \mathbb{K}] \leq (\deg P)!$.*

Dans la suite on note $q = p^n$ avec $p \in \mathcal{P}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 64. $\mathcal{D}_{\mathbb{F}_p}(X^q - X)$ est un corps à q éléments. Réciproquement, si $|\mathbb{K}| = q$, alors $\mathbb{K} = \mathcal{D}_{\mathbb{K}_0}(X^q - X)$. En particulier, il existe un unique corps de cardinal q à isomorphisme près, on le note $\mathbb{F}_q$.

Théorème 65. 1. Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{F}_q$, alors il existe $d \mid n$ tel que $|\mathbb{K}| = p^d$;
2. $\forall d \mid n$, il existe un unique sous-corps $\mathbb{K}$ de cardinal p^d de $\mathbb{F}_q$. On a $\mathbb{K} = \{x \in \mathbb{F}_q, x^{p^d} = x\}$.

D2

Théorème 66 (Algorithme de Berlekamp). Soit $P = P_1 \dots P_r \in \mathbb{F}_q[X]$ avec $P_1, \dots, P_r$ irréductibles 2 à 2 premiers entre eux. On note $S_P : \mathbb{F}_q[X]/(P) \rightarrow \mathbb{F}_q[X]/(P)$, c'est une application $\mathbb{F}_q$ -linéaire. On a alors $r = \dim(\ker(S_P - id)) = \deg(P) - \text{rg}(S_P - id)$. Si de plus $r \geq 2$ et $\bar{V} \in \ker(S_P - id) \setminus \mathbb{F}_q$, alors $P = \prod_{\alpha \in \mathbb{F}_q} \text{pgcd}(P, V - \alpha)$ est une décomposition non triviale de P .

Lemme 67. Soit $P \in \mathbb{F}_q[X]$, alors :

1. $\text{pgcd}(P, P') = 1 \Leftrightarrow P$ n'a pas de facteur carré.
2. $\text{pgcd}(P, P') = P \Leftrightarrow \exists R \in \mathbb{F}_q[X], P = R^p$.
3. Si on est dans aucun des deux cas précédents, alors $P = \text{pgcd}(P, P') \cdot \frac{P}{\text{pgcd}(P, P')}$ est une décomposition non triviale de P .

(L'algo suivant est sûrement à mettre en annexe).

Algorithme 68 (de factorisation d'un polynôme $P \in \mathbb{F}_q[X]$). Soit $P \in \mathbb{F}_q[X]$.

. Si P est constant :

. Fin de l'algorithme.

. Sinon :

. On calcule $D := \text{pgcd}(P, P')$.

. Si $D = 1$:

. On applique l'algorithme de Berlekamp à P .

. Si $D = P$:

. On trouve $R \in \mathbb{F}_q[X]$ tq $P = R^p$ (il suffit de mettre les coefficients de P à la puissance p^{n-1}).

. On applique l'algorithme à R .

. Sinon :

. On applique l'algorithme à D et $\frac{P}{D}$.

[BMP05], V.3.2 et [Dem09], IX.6

Références

[Gri90] J. GRIFONE. *Algèbre linéaire*. CÉPADUÈS, 1990. ISBN : 9782383951346.

- [Cia00] P. CIARLET. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. DUNOD, 2000. ISBN : 9782100041671.
- [BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ. *Objectif Agrégation*. H&K, 2005. ISBN : 9782914010924.
- [Dem09] M. DEMAZURE. *Cours d'algèbre*. CASSINI, 2009. ISBN : 9782842251277.
- [Goz09] I. GOZARD. *Théorie de Galois : Niveau L3-M1*. ELLIPSES, 2009. ISBN : 9782729842772.
- [Les+20] D. LESESVRE et al. *131 développements pour l'oral - Agrégation externe Mathématiques/Informatique*. DUNOD, 2020. ISBN : 9782100795567.
- [Gou21] X. GOURDON. *Les Maths en tête - Algèbre et probabilités - 3e édition*. ELLIPSES, 2021. ISBN : 9782340059597.
- [Rom21] J.E. ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. DEBOECK, 2021. ISBN : 9782807332201.