

Leçon 144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Racines d'un polynôme.

1.1 Multiplicités.

[Gou21], II.2.1-3 et [Ber20], XIV.6

~ 10 items.

Suivre le Gourdon en généralisant pour des anneaux commutatifs unitaires intègres (définir l'évaluation $P(x)$ pour $P \in A[X]$, $x \in B$ avec $A \subseteq B$). On peut regarder dans le Berhuy aussi pour avoir des trucs plus généraux.

1.2 Polynômes scindés.

[Gou21], II.2.2

~ 5 items.

Définition polynôme scindé, théorème de d'Alembert-Gauss, application pour la description des irréductibles de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$. Rajouter un ou deux exemples.

1.3 Applications en algèbre linéaire.

[MM22], V.1-2

~ 5 items.

Valeurs propres = racines de μ_u = racines de χ_u . Caractérisation de la diagonalisabilité (polynôme annulateur SARS), et de la trigonalisabilité (χ_u scindé). Un ou deux exemples.

2 Polynômes symétriques.

[Gou21], II.2.2 et II.4.2 et [Ulm18], II.4

~ 5 items.

Définition des polynômes symétriques/symétriques élémentaires. Relations coefficients/racines. Théorème fondamental des polynômes symétriques (la preuve est dans le Ulmer). Un ou deux exemples et application au fait que les entiers algébriques forment un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

3 Théorie des corps.

3.1 Nombres algébriques.

[Goz09], III.1 et IV.1 et [Per96], III.1

~ 10 items.

Suivre le Gozart pour la définition des nombres algébriques en allant un peu plus vite mais en rajoutant quelques exemples. Donner la définition des nombres constructibles, quelques exemples, le fait que les nombres constructibles forment un corps stable par racine carré, le théorème de Wantzel et le développement 2 (polygones constructibles).

D1

Théorème. 1. Soit $n \geq 3$ et $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ sa décomposition en facteurs premiers. Alors, $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ est constructible si et seulement si les $e^{\frac{2i\pi}{p_j^{\alpha_j}}}$ sont constructibles ;

2. $\forall \alpha \in \mathbb{N}$, $e^{\frac{2i\pi}{2^\alpha}}$ est constructible ;

3. Soient $p \geq 3$ un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Alors, $e^{\frac{2i\pi}{p^\alpha}}$ est constructible si et seulement si $\alpha = 1$ et p est un nombre premier de Fermat (i.e. de la forme $p = 2^m + 1$).

[Car01], IV.2 et X.4.1

3.2 Adjonction de racines.

[Goz09], V et [Per96], III.1.c

~ 10 items.

Corps de Rupture, existence et unicité, exemple. Idem pour corps de décomposition et clôture algébrique.

3.3 Corps finis.

[Goz09], VII et [Per96], III.2

~ 5 items.

Existence et unicité d'un corps fini, construction pratique comme corps de rupture, $\mathbb{F}_q = \mathbb{Z}[X^q - X]$ dans une clôture algébrique.

4 Localisation des racines.

[CP22], I.3.3, [BMP05], I.2.2 et [Rom19], VI.2

~ 5-10 items.

Théorème de Rolle, méthode de la puissance itérée et de la puissance inverse (puissance itérée appliquée à $(M - \mu)^{-1}$), théorème de Gauss-Lucas, borne de Cauchy, disques de Gershgorin, régularité des racines. DEV 2 : quadrature de Gauss (la méthode se base fondamentalement sur la connaissance des racines du n -ième polynôme orthogonal).

D2

Théorème. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $I(P) := \int_{-1}^1 P(t)dt$ et on munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = I(PQ)$. On notera $(P_k)_{k \geq 0}$ la base orthonormée obtenue à partir du procédé de Gram-Schmidt sur $(X^k)_{k \geq 0}$.

1. Soit $n \geq 1$. P_n possède n racines simples distinctes $-1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n < 1$;
2. Soient $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\lambda_i := I(L_i)$.
Alors, $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $I(P) = S_n(p) := \sum_{i=1}^n \lambda_i P(\alpha_i)$. De plus, $\lambda_i > 0$.

Corollaire. On prolonge la définition de I et S_n aux f continues. Alors, $\forall f \in \mathcal{C}^{2n}([-1; 1])$, $|I(f) - S_n(f)| \leq \frac{4M}{(2n+1)!}$ où $M = \sup_{[-1;1]} |f^{(2n)}|$.

[Cal24], X.4

Références

- [Per96] D. PERRIN. *Cours d'algèbre (Agrégation)*. ELLIPSES, 1996. ISBN : 9782729855529.
- [Car01] J.C. CARREGA. *Théorie des corps : La règle et le compas*. HERMANN, 2001. ISBN : 9782705614492.
- [BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ. *Objectif Agrégation*. H&K, 2005. ISBN : 9782914010924.
- [Goz09] I. GOZARD. *Théorie de Galois : Niveau L3-M1*. ELLIPSES, 2009. ISBN : 9782729842772.
- [Ulm18] F. ULMER. *Anneaux, corps, résultants - Algèbre pour L3/M1/agrégation*. ELLIPSES, 2018. ISBN : 9782340025752.
- [Rom19] J.E. ROMBALDI. *Analyse matricielle*. EDP SCIENCES, 2019. ISBN : 9782759823413.
- [Ber20] G. BERHUY. *Algèbre : le grand combat*. CALVAGE&MOUNET, 2020. ISBN : 9782916352831.
- [Gou21] X. GOURDON. *Les Maths en tête - Algèbre et probabilités - 3e édition*. ELLIPSES, 2021. ISBN : 9782340059597.
- [CP22] P. CALDERO et M. PERONNIER. *Carnet de voyage en Algérie*. CALVAGE&MOUNET, 2022. ISBN : 9782493230034.
- [MM22] R. MANSUY et R. MNEIMNÉ. *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*. DEBOECK, 2022. ISBN : 9782807336612.
- [Cal24] P. CALDERO. *Carnet de voyage en Analystan*. CALVAGE&MOUNET, 2024. ISBN : 9782493230119.