

Leçon 127 : Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Algébricité.

1.1 Nombres rationnels.

[Duv07], I et II.1

~ 10-15 items.

Définition des nombres rationnels, $\sqrt{d}$, e , π irrationnels, approximation diophantiennes, développements p -adiques. (suivre le Duverney).

1.2 Nombres algébriques et transcendants.

[Duv07], IX.1 et IX.3 et [Goz09], III

~ 10-15 items.

Définition nombre algébrique/transcendant, polynôme minimal, $\overline{\mathbb{Q}}$ est un corps (plutôt dans le Gozard). Critère de Liouville pour les nombres transcendants.

2 Exemples d'extensions algébriques de $\mathbb{Q}$.

2.1 Extensions cyclotomiques.

[Per96], III.4 et [Goz09], VI.1

~ 10 items.

Les deux livres sont très bien pour cette partie. Le Perrin a peut-être un peu plus d'applications, notamment la version faible du théorème de la progression arithmétique de Dirichlet, qui rentre très bien dans cette leçon.

2.2 Nombres constructibles.

[Goz09], IV et [Car01], II.1

~ 10 items.

Définition des nombres constructibles (complexes et réels) | quelques exemples de constructions | théorème de Gauss-Wantzel | corollaire : algébrique de degré une puissance de 2 | problèmes des grecs : quadrature du cercle, duplication du cube et trisection de l'angle | polygones constructibles : DEV 1

D1

Théorème. 1. Soit $n \geq 3$ et $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ sa décomposition en facteurs premiers. Alors, $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ est constructible si et seulement si les $e^{\frac{2i\pi}{p_j^{\alpha_j}}}$ sont constructibles ;

2. $\forall \alpha \in \mathbb{N}, e^{\frac{2i\pi}{2^\alpha}}$ est constructible ;

3. Soient $p \geq 3$ un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Alors, $e^{\frac{2i\pi}{p^\alpha}}$ est constructible si et seulement si $\alpha = 1$ et p est un nombre premier de Fermat (i.e. de la forme $p = 2^m + 1$).

[Car01], IV.2 et X.4.1

3 Anneaux de la forme $\mathbb{Z}[\omega]$.

[Per96], II.5-6 et [Duv07], V.1-2

~ 5 items.
 $\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right]$ principal non euclidien | $\mathbb{Z}[i]$ et le théorème des deux carrés | corps de nombres quadratiques | entiers d'un corps de nombres quadratiques | formes de l'anneau des entiers selon la congruence de d modulo 4.

Dbon

Théorème. $\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right]$ est un anneau principal non euclidien.

[Per96], II.5

D2

Théorème. 1. Soit $p \in \mathcal{P}$. Alors, p est somme de deux carrés $\Leftrightarrow p$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$ $\Leftrightarrow p = 2$ ou $p \equiv 1[4]$.

2. Soit $n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{vp(n)} \geq 2$. Alors, n est somme de deux carrés si et seulement si $\forall p \equiv 3[4], vp(n) \in 2\mathbb{N}$.

3. Les irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont, aux inversibles près, les $p \in \mathcal{P}$ avec $p \equiv 3[4]$ et les $z \in \mathbb{Z}[i]$ avec $N(z) \in \mathcal{P}$.

[Per96], II.6

Références

- [Per96] D. PERRIN. *Cours d'algèbre (Agrégation)*. ELLIPSES, 1996. ISBN : 9782729855529.
- [Car01] J.C. CARREGA. *Théorie des corps : La règle et le compas*. HERMANN, 2001. ISBN : 9782705614492.
- [Duv07] D. DUVERNEY. *Théorie des nombres*. DUNOD, 2007. ISBN : 9782100512348.
- [Goz09] I. GOZARD. *Théorie de Galois : Niveau L3-M1*. ELLIPSES, 2009. ISBN : 9782729842772.