

Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Groupe linéaire et groupe spécial linéaire.

1.1 Définitions et premières propriétés.

[Szp+09], III.VII.1.1-2

~ 6 items.

définitions $GL(E)$, $GL_n(\mathbb{K})$ | remarque : naturellement défini par une action | isomorphisme en fixant une base | caractérisations de $u \in GL(E)$ | définition $SL(E)$, $SL_n(\mathbb{K})$ | s.e.c. $1 \rightarrow SL(E) \rightarrow GL(E) \rightarrow \mathbb{K}^* \rightarrow 1$, scindage, produit semi-direct

1.2 Générateurs de $GL(E)$ et $SL(E)$.

[Szp+09], III.VII.1.3 et [Rom21], VI.1

~ 8 items.

définition dilatation, réflexion | caractérisations | comportement vis-à-vis de la conjugaison | définition transvection | caractérisations | comportement vis-à-vis de la conjugaison | générateurs de $SL(E)$ et $GL(E)$ | remarque sur le pivot de Gauss, exemple en annexe

1.3 Centre et commutateurs.

[Szp+09], III.VII.1.4 et [Per96], IV.3

~ 6 items.

homothétie $\Leftrightarrow$ laisse stable toutes les droites | centres de GL_n et SL_n | définitions PGL et PSL | $1 \rightarrow PSL(E) \rightarrow PGL(E) \rightarrow \mathbb{K}^*/(\mathbb{K}^*)^n \rightarrow 1$ | groupes dérivés | simplicité de PSL_n selon les cas (admis)

1.4 Propriétés caractéristiques au corps de base.

[Per96], IV.5 et [Szp+09], III.VII.1.5-6

~ 6 items.

cardinaux dans le cas des corps finis | dans $GL_n(\mathbb{C})$: fini $\Leftrightarrow$ exposant fini | $GL_n(\mathbb{K})$ ouvert dense de $M_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) | composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$ | connexité de $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$ | homéomorphismes $GL_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^* \times SL_n(\mathbb{C})$, $GL_n^+(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}_+^* \times SL_n(\mathbb{R})$

2 Groupe orthogonal

On suppose $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$.

2.1 Cas général.

[Szp+09], III.VII.2.1

~ 12 items.

action $GL(E) \curvearrowright Q(E)$, f.q. équivalentes | définition $O(q)$ | traduction matricielle | exemple : $O_n(\mathbb{R})$ | $\det(u) = \pm 1$ | définition $SO(q)$ | exemple : DEV bonus | définition symétries orthogonales | exemple : réflexions, retournements | comportement vis-à-vis de la conjugaison | générateurs $O(q)$, $SO(q)$ | centres de $O(q)$, $SO(q)$

Dbon

Théorème. Si p est impair alors :

$$SO_2(\mathbb{F}_q) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} & \text{si } -1 \in \mathbb{F}_q^{*2} \\ \mathbb{Z}/(q+1)\mathbb{Z} & \text{si } -1 \notin \mathbb{F}_q^{*2} \end{cases}$$

De plus, $SO_2(\mathbb{F}_{2^n}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

[CG18], VIII.3

2.2 L'espace euclidien canonique, premiers résultats.

[Per96], I.5, [Szp+09], III.VII.2.2 et [MM22], X.2

~ 6 items.

$\mathfrak{S}_n \hookrightarrow GL_n(\mathbb{K})$, déterminant | corollaire : existence d'un p -Sylow | $1 \rightarrow SO_n \rightarrow O_n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 1$ | isométries en dimension 2 | DEV 1 | réduction générale

D1

Théorème. Soit $\varphi : (\mathbb{S}^1, \cdot) \rightarrow (GL_n(\mathbb{R}), \times)$ un morphisme de groupes continu.

Alors, $\exists Q \in GL_n(\mathbb{R}), \exists r \in \mathbb{N}, \exists k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(e^{it}) = Q \begin{pmatrix} R_{tk_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R_{tk_r} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}, \text{ où } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

[FGN09], IV.29

2.3 Étude approfondie de $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$.

[Szp+09], III.VII.2.2

~ 5 items.

$SO_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ | DEV 2 | $O_n(\mathbb{R})$ compact | sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ | $SO_n(\mathbb{R})$ cpa

D2

Théorème. $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

[CP22], III.5

Références

- [Per96] D. PERRIN. *Cours d'algèbre (Agrégation)*. ELLIPSES, 1996. ISBN : 9782729855529.
- [FGN09] S. FRANCINO, H. GIANELLA et S. NICOLAS. *Exercices de mathématiques : Oraux x-ens, algèbre 2*. CASSINI, 2009. ISBN : 9782842250911.
- [Szp+09] A. SZPIRGLAS et al. *Mathématiques L3 : Algèbre*. PEARSON, 2009. ISBN : 9782744073519.
- [CG18] P. CALDERO et J. GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries Tome 2*. CALVAGE&MOUNET, 2018. ISBN : 9782916352671.
- [Rom21] J.E. ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. DEBOECK, 2021. ISBN : 9782807332201.
- [CP22] P. CALDERO et M. PERONNIER. *Carnet de voyage en Algérie*. CALVAGE&MOUNET, 2022. ISBN : 9782493230034.
- [MM22] R. MANSUY et R. MNEIMNÉ. *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*. DEBOECK, 2022. ISBN : 9782807336612.