

Leçon 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Parties génératrices.

1.1 Généralités.

[Ber20], VI.3

~ 8 items.

intersection de sous-groupes | définition groupe engendré, notation | description en termes de mots | exemple : $\langle x \rangle$ | définition partie génératrice | exemples | utilisation parties génératrices | définition groupe de type fini

1.2 Groupes cycliques et monogènes.

[Ber20], VI.6

~ 8 items.

définition monogène, cyclique | exemples | abéliens | classification | $|G| \in \mathcal{P} \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ | sous-groupes d'un groupe cyclique | corollaire : $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ | théorème de structure des groupes abéliens de type fini

2 Exemples de parties génératrices de groupes classiques, conséquences.

2.1 Cas de $\mathfrak{S}_n$.

[Ber20], VIII.2-3 et [Per96], I.8

~ 10 items.

décomposition en produit de cycles | corollaire : générateurs | ordre d'une permutation | définition, unicité signature, signature d'une transposition | définition $\mathfrak{A}_n$, cardinal | générateurs de $\mathfrak{A}_n$ | $\mathfrak{A}_n$ simple ssi $n \neq 4$ | corollaire : sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ | DEV 1 | cas de $\mathfrak{S}_6$

D1

Théorème. *Pour $n \neq 6$, les automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ sont intérieurs.*

[Per96], I.8

2.2 Cas du groupe linéaire.

[Szp+09], III.VII.1.3 et [Rom21], VI.1

~ 8 items.

définition dilatation, réflexion | caractérisations | comportement vis-à-vis de la conjugaison | définition transvection | caractérisations | comportement vis-à-vis de la conjugaison | générateurs de $SL(E)$ et $GL(E)$ | remarque sur le pivot de Gauss, exemple en annexe

2.3 Cas du groupe orthogonal.

[Szp+09], III.VII.2 et [MM22], X.2

~ 6 items.

définition symétries orthogonales | exemple : réflexions, retournements | comportement vis-à-vis de la conjugaison | générateurs $O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$ | réduction isométries | DEV 2

D2

Théorème. $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

[CP22], III.5

2.4 Cas du groupe diédral.

[Ulm21], I.3 et [Szp+09]

~ 3 items.

définition groupe diédral | générateurs | $D_{2n} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Références

- [Per96] D. PERRIN. *Cours d'algèbre (Agrégation)*. ELLIPSES, 1996. ISBN : 9782729855529.
- [Szp+09] A. SZPIRGLAS et al. *Mathématiques L3 : Algèbre*. PEARSON, 2009. ISBN : 9782744073519.
- [Ber20] G. BERHUY. *Algèbre : le grand combat*. CALVAGE&MOUNET, 2020. ISBN : 9782916352831.
- [Rom21] J.E. ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. DEBOECK, 2021. ISBN : 9782807332201.
- [Ulm21] F. ULMER. *Théorie des groupes*. ELLIPSES, 2021. ISBN : 9782340059306.
- [CP22] P. CALDERO et M. PERONNIER. *Carnet de voyage en Algèbre*. CALVAGE&MOUNET, 2022. ISBN : 9782493230034.
- [MM22] R. MANSUY et R. MNEIMNÉ. *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*. DEBOECK, 2022. ISBN : 9782807336612.