

Leçon 105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Le groupe symétrique.

1.1 Généralités.

[Ber20], VIII.1

~ 8 items.

définition $\mathfrak{S}(E)$, $\mathfrak{S}_n$ | remarque : naturellement défini par une action de groupe, propriétés géométriques | cardinal de $\mathfrak{S}(E)$ | E et E' en bijection $\Rightarrow \mathfrak{S}(E) \simeq \mathfrak{S}(E')$ | corollaire : $|E| = n \Rightarrow \mathfrak{S}(E) \simeq \mathfrak{S}_n$ | théorème de Cayley | définition support | supports disjoints $\Rightarrow$ commutent

1.2 Lien avec les actions de groupes.

1.3 Décomposition en produit de cycles.

[Ber20], VIII.2

~ 11 items.

définition orbite | exemple | définition cycle, transposition | notation | exemple | décomposition en produit de cycles | exemple en annexe | ordre d'une permutation | formule de conjugaison d'un cycle | classe conjugaison d'une permutation | exemple

1.4 Systèmes de générateurs.

[Ber20], VIII.3

~ 5 items.

engendré par les cycles | par les transpositions | remarque : pas unique | par les transpositions $(1\ i)$ et $(i\ i+1)$ | par $(1\ 2)$ et $(1\ \dots\ n)$

2 Structure du groupe symétrique.

2.1 Signature, groupe alterné.

[Ber20], VIII.4

~ 7 items.

définition signature (avec la formule) | unique morphisme non trivial $\mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{C}^\times$ | lien signature - parité du nombre de transpositions | exemple : signature d'un cycle | signature d'une permutation quelconque | définition $\mathfrak{A}_n$, cardinal | générateurs de $\mathfrak{A}_n$

2.2 Structure de $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$.

[Per96], I.8 et [Ber20], VIII.5

~ 6 items.

3-cycles conjugués dans $\mathfrak{A}_n$ pour $n \geq 5$ | $\mathfrak{S}_n$ simple ssi $n \neq 4$ | corollaire : groupes dérivés | corollaire : sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ | DEV 1 | cas de $n = 6$

D1

Théorème. Pour $n \neq 6$, les automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ sont intérieurs.

[Per96], I.8

3 Permutations aléatoires.

[CM16], IV.2

~ 5 items.

remarque : difficulté de simuler une permutation aléatoire | algorithme Fischer-Yates-Knuth | DEV 1 | nombre de dérangement | méthode du rejet

Dbon

Théorème. On pose $X^{\overline{n}} := X(X+1)\dots(X+n-1)$. On définit $|s(n, k)|$ les **nombre de Stirling de première espèce non signés** par : $X^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n |s(n, k)| X^k$.

Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\forall n \geq 1$ U_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$. Alors :

1. $\sigma_n := (1 U_1) \circ \dots \circ (n U_n)$ suit la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$;
2. Soit C_n le nombre de cycles dans la décomposition en cycles à support disjoints de σ_n . Alors,
$$\mathbb{P}(C_n = k) = \frac{|s(n, k)|}{n!} ;$$
3. $\frac{C_n - \ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$.

[GK11], XIV.4.1.292

Remarque : variante du développement sur les nombres de Stirling, qui rentre mieux dans les leçons de probas et la 218 mais pas dans la 190.

4 Applications.

4.1 En algèbre linéaire.

[Ber20], IV.4 et [MM22], V.4

~ 4 items.

formule du déterminant | définition matrice de permutation | déterminant d'une matrice de permutation | (permutations conjuguées $\Leftrightarrow$ matrices semblables)

4.2 En géométrie.

[Ulm21], I.3 et [CG18], XII.3

~ 4 items.

définition $\text{Is}(X)$, $\text{Is}^+(X)$ | exemple du triangle | exemple du tétraèdre | DEV bonus : exemple du cube

D2

Théorème. *Les groupes d'isométries du cube sont $\text{Is}^+(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $\text{Is}(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

[CG18], XII.3.5

Remarque : si on a le temps et l'espace, on peut aussi faire les groupes d'isométries du tétraèdre.

4.3 Polynômes symétriques.

[Gou21], II.4 et [Ber20], XIV.7

~ 6 items.

définition polynôme symétrique | exemple | définition polynômes symétriques élémentaires | théorème de structure | remarque : preuve algorithmique (exemple en annexe)

Références

- [Per96] D. PERRIN. *Cours d'algèbre (Agrégation)*. ELLIPSES, 1996. ISBN : 9782729855529.
- [GK11] O. GARET et A. KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. ELLIPSES, 2011. ISBN : 9782729870409.
- [CM16] D. CHAFAÏ et F. MALRIEU. *Recueil de Modèles Aléatoires*. SPRINGER, 2016. ISBN : 9783662497678.
- [CG18] P. CALDERO et J. GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries Tome 2*. CALVAGE&MOUNET, 2018. ISBN : 9782916352671.
- [Ber20] G. BERHUY. *Algèbre : le grand combat*. CALVAGE&MOUNET, 2020. ISBN : 9782916352831.
- [Gou21] X. GOURDON. *Les Maths en tête - Algèbre et probabilités - 3e édition*. ELLIPSES, 2021. ISBN : 9782340059597.
- [Ulm21] F. ULMER. *Théorie des groupes*. ELLIPSES, 2021. ISBN : 9782340059306.
- [MM22] R. MANSUY et R. MNEIMNÉ. *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*. DEBOECK, 2022. ISBN : 9782807336612.