

Leçon 104 : Groupes finis. Exemples et applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Groupes finis.

1.1 Généralités.

[Ber20], VI.4

~ 8 items.

définition ordre groupe/élément | exemple | définition indice | théorème de Lagrange | contre-exemple pour la réciproque | $x^m = 1 \Leftrightarrow o(x)|m$ | ordre de x^d | ordre de xy selon les cas

1.2 Groupes cycliques.

[Ber20], VI.6

~ 5 items.

définition groupe cyclique | deux groupes cycliques de mêmes cardinaux sont isomorphes | $|G| \in \mathcal{P} \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ | sous-groupes d'un groupe cyclique | corollaire : $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$

1.3 p -groupes et théorèmes de Sylow.

[Per96], I.4-5 et [Ber20], XI.1

~ 8 items.

définition p -groupe | $G \curvearrowright X \Rightarrow |X| \equiv |X^G| [p]$ | corollaire : centre d'un p -groupe non trivial | définition p -Sylow | théorèmes de Sylow | applications des théorèmes de Sylow (on peut en chercher quelques unes dans les exos du Berhuy) | corollaire : il existe des sous-groupes d'ordre $p^i \forall i \leq \alpha$ |

2 Étude du groupe symétrique.

2.1 Généralités.

[Ber20], VIII.1-4

~ 15 items.

définition $\mathfrak{S}_n$ | définition support | exemple | permutations à supports disjoints commutent | définition cycle, transposition | exemple | ordre d'un cycle | décomposition en produit de cycles | exemple | corollaire : générateurs | ordre d'une permutation quelconque | permutations conjugués ssi même tailles de cycles | définition, unicité signature, signature d'une transposition | définition $\mathfrak{A}_n$, cardinal | générateurs de $\mathfrak{A}_n$

2.2 Structure de $\mathfrak{S}_n$ et de $\mathfrak{A}_n$.

[Per96], I.8 et [Ber20], VIII.5

~ 7 items.

$\mathfrak{A}_n$ simple ssi $n \neq 4$ | corollaire : groupes dérivés | $D(\mathfrak{A}_4)$ | sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ | sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ | DEV 1 | cas de $\mathfrak{S}_6$

D1

Théorème. *Pour $n \neq 6$, les automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ sont intérieurs.*

[Per96], I.8

3 Éléments de classification des groupes finis.

3.1 Classification des groupes abéliens finis.

[Ber20], XII.5

~ 4 items.

théorème des restes chinois | théorème de structure des GAF | exemples

3.2 Groupes de petits cardinaux.

[Ber20], XIII et [Ulm21], I.3

~ 6 items.

groupes d'ordre p^2 | groupes d'ordre pq | définition groupe diédral | propriétés groupe diédral | définition groupe des quaternions | classification des groupes d'ordre ≤ 8 (tableau en annexe)

4 Groupes finis en géométrie.

[CG18], XII.3

~ 3 items.

définition $\text{Is}(X)$, $\text{Is}^+(X)$ | exemple du tétraèdre | DEV 1 : exemple du cube

D2

Théorème. *Les groupes d'isométries du cube sont $\text{Is}^+(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $\text{Is}(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

[CG18], XII.3.5

Remarque : si on a le temps et l'espace, on peut aussi faire les groupes d'isométries du tétraèdre.

5 Groupes finis en théorie des corps ??????

[Goz09], VII.1, VII.7 et XII.2 et [Pey04], II.1

~ 8 items.

sous-groupe fini de $\mathbb{K}^\times$ | remarque : deux groupes finis issus des corps finis : $(\mathbb{F}_q, +)$ et $(\mathbb{F}_q^\times, \times)$ | définition sommes de Gauss | carrés dans un corps fini | définition symbole de Legendre | définition somme de Gauss associée au symbole de Legendre | DEV bonus : réciprocity quadratique | exemple

Dbon

Proposition. On a $s(a) = \left(\frac{a}{p}\right) s(1) \forall a \in \mathbb{F}_p^*$ et $s(1)^2 = \left(\frac{-1}{p}\right) p = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p \in \mathbb{K}$.

Théorème (Loi de réciprocité quadratique et deuxième loi complémentaire). .

$$1. \left(\frac{p}{p'}\right) \left(\frac{p'}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(p'-1)}{4}}$$

$$2. \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

[Goz09], XII.2 et [Zav13], II.6

Remarque : besoin de définir les sommes de Gauss.

Références

- [Per96] D. PERRIN. *Cours d'algèbre (Agrégation)*. ELLIPSES, 1996. ISBN : 9782729855529.
- [Pey04] G. PEYRÉ. *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*. ELLIPSES, 2004. ISBN : 9782729818678.
- [Goz09] I. GOZARD. *Théorie de Galois : Niveau L3-M1*. ELLIPSES, 2009. ISBN : 9782729842772.
- [Zav13] M. ZAVIDOVIQUE. *Un max de math*. CALVAGE&MOUNET, 2013. ISBN : 9782916352299.
- [CG18] P. CALDERO et J. GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries Tome 2*. CALVAGE&MOUNET, 2018. ISBN : 9782916352671.
- [Ber20] G. BERHUY. *Algèbre : le grand combat*. CALVAGE&MOUNET, 2020. ISBN : 9782916352831.
- [Ulm21] F. ULMER. *Théorie des groupes*. ELLIPSES, 2021. ISBN : 9782340059306.