

Leçon 103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Conjugaison et quotients.

1.1 Action par conjugaison.

[Ulm21], IV.3

~ 10 items.

définition de l'action | exemple : matrices semblables | remarque : action par automorphismes | éléments conjugués, classes de conjugaison | remarque : principe de conjugaison | centre, centralisateur | morphismes intérieurs | action par conjugaison sur les sous-groupes | normalisateur d'un sous-groupe

1.2 Sous-groupes distingués.

[Per96], I.2-3 et [Ber20], X.2

~ 5-10 items.

définition sous-groupe distingué | exemples : $\{1\}, G, H \subseteq Z(G)$, cas des groupes abéliens | $f^{-1}(H) \triangleleft G$ si $H \triangleleft G'$ et $f(H) \triangleleft G'$ si $H \triangleleft G$ et f surjectif | définition groupe dérivé | $D(G) \triangleleft G$ | caractérisation produit direct interne (Berhuy) | définition groupe simple | exemple des $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

1.3 Groupes quotients.

[Ber20], IX.1-2

~ 10 items.

relation d'équivalence modulo H , ensemble G/H , classes gH , projection canonique | application : théorème de Lagrange | groupe et π morphisme ssi $H \triangleleft G$ | $|G/H| = [G : H]$ | application : distingué $\Leftrightarrow$ noyau de morphisme | exemple : les $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ | théorème de factorisation | premier théorème d'iso | exemples | deuxième théorème d'isomorphisme | troisième théorème d'isomorphisme

2 Théorèmes de Sylow.

[Per96], I.5 et [Ber20], XI.1

~ 5 items.

définition p -Sylow | théorèmes de Sylow | p -Sylow distingué ssi c'est l'unique p -Sylow | applications des théorèmes de Sylow (on peut en chercher quelques unes dans les exos du Berhuy)

3 Le groupe symétrique.

3.1 Type d'une permutation.

[Ber20], VIII.1-2

~ 5 items.

permutations à supports disjoints commutent | décomposition en produit de cycles à supports disjoints | exemple | conjugaison d'un cycle | définition type d'une permutation | permutations conjuguées ssi même type

3.2 Groupe alterné.

[Ber20], VIII.4 et [Per96], I.8

~ 5-10 items.

$\mathfrak{S}_n$ engendré par les transpositions | signature : unique morphisme non trivial $\mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{C}^\times$ | définition $\mathfrak{A}_n$ (Berhuy) : $\mathfrak{A}_n$ simple pour $n \geq 5$ | $D(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n$ pour $n \geq 5$ et $D(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{A}_n$ pour $n \geq 2$ | sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ | sous-groupes d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ (Perrin) :

3.3 Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$.

[Per96], I.8

~ 2 item.

DEV 1 : automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ | cas de $n = 6$

D1

Théorème. *Pour $n \neq 6$, les automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ sont intérieurs.*

[Per96], I.8

4 Action par conjugaison en algèbre linéaire.

4.1 Réduction des endomorphismes sur $\mathbb{C}$.

[MM22], XI.4

~ 5 items.

définition relation similitude | matrices semblables ssi représentent le même endomorphisme dans des bases différentes | définition bloc de Jordan | réduction de Jordan

4.2 Réduction des endomorphismes orthogonaux.

[MM22], X.2 et [Per96], VI

~ 5 items.

forme des isométries du plan | réduction des isométries | $O_n(\mathbb{R})$ engendré par les réflexions orthogonales, $SO_n(\mathbb{R})$ engendré par les retournements orthogonaux pour $n \geq 3$ | DEV 2 : $SO_3(\mathbb{R})$ simple

D2

Théorème. *$SO_3(\mathbb{R})$ est simple.*

[CP22], III.5

Références

- [Per96] D. PERRIN. *Cours d'algèbre (Agrégation)*. ELLIPSES, 1996. ISBN : 9782729855529.
- [Ber20] G. BERHUY. *Algèbre : le grand combat*. CALVAGE&MOUNET, 2020. ISBN : 9782916352831.
- [Ulm21] F. ULMER. *Théorie des groupes*. ELLIPSES, 2021. ISBN : 9782340059306.
- [CP22] P. CALDERO et M. PERONNIER. *Carnet de voyage en Algérie*. CALVAGE&MOUNET, 2022. ISBN : 9782493230034.
- [MM22] R. MANSUY et R. MNEIMNÉ. *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*. DEBOECK, 2022. ISBN : 9782807336612.