

Leçon 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Généralités.

1.1 Définitions et premières propriétés.

[AF93], VI.7

~ 5 items.

module est un morphisme de groupe | définition nombres complexes de module 1 | exemple : $\pm 1, \pm i$
| remarque : topologiquement c'est un cercle | isomorphisme continu de groupes $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\times$

1.2 Exponentielle et fonctions trigonométriques.

[QQ17], I.2 et [AF93], VI.7

~ 11 items.

définition exponentielle comme une série entière | propriétés exponentielle : $\exp(z+z') = \exp(z) \exp(z')$, $\exp(z) \exp(\bar{z}) = 1$, $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$, $|\exp(z)| = \exp(\Re(z))$ | morphisme surjectif $\exp : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{U}$, noyau = $2\pi\mathbb{Z}$ |
exemples : $-1 = e^{i\pi}$, $i = e^{i\pi/2}$, $j = e^{2i\pi/3}$ | corollaire : $\mathbb{U} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ | corollaire : $z = |z|e^{i\theta}$, $\theta = \arg(z)$, unique modulo 2π , argument principal | définition cos et sin, formules d'Euler | remarque :
 $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ | formule de De Moivre | application : $\sum e^{ik\theta}$ | application : linéarisation, polynômes de Tchebychev

2 Racines de l'unité.

2.1 Sous groupe de $\mathbb{U}$.

[AF93], VI.8 et [Goz09], VI.1

~ 7 items.

définition racines n -ièmes | sous-groupe de $\mathbb{U}$: soit dense soit $\mathbb{U}_n$ | $\mathbb{U}_n$ est l'unique sous-groupe de cardinal n de $\mathbb{C}^\times$ | $\mathbb{U}_n$ est cyclique, générateurs, racines primitives | nombre de racines primitives |
exemples | définition polygones réguliers (dessin en annexe)

2.2 Polynômes cyclotomiques.

[Goz09], VI.1 et VI.4 et [Per96], III.4

~ 7 items.

définition polynôme cyclotomique | exemples | $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$ | $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ | Φ_n irréductible sur $\mathbb{Q}$ |
corollaire : polynôme minimal des racines primitives | théorème de Dirichlet faible (Perrin, exos)

3 Applications en géométrie plane.

3.1 Angles et rotations.

[Gri90], VII.10-11

~ 8 items.

isomorphisme de groupes $\mathbb{Z}/2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} SO_2(\mathbb{R})$, indépendant de la b.o.n. directe | réduction des isométries euclidiennes | exemple des rotations en dimension 3 | DEV 1 : morphismes continus $\mathbb{U} \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$

| définition angle orienté entre vecteurs | exemple | relation de Chasles | $\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|}$, $\sin \theta = \frac{\det_{b.o.n.}(u, v)}{\|u\|\|v\|}$

D1

Théorème. Soit $\varphi : (\mathbb{S}^1, \cdot) \rightarrow (GL_n(\mathbb{R}), \times)$ un morphisme de groupes continu.

Alors, $\exists Q \in GL_n(\mathbb{R}), \exists r \in \mathbb{N}, \exists k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(e^{it}) = Q \begin{pmatrix} R_{tk_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & R_{tk_r} & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}, \text{ où } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

[FGN09], IV.29

3.2 Polygones constructibles.

[Goz09], IV et [Car01], II.1

~ 5 items.

Définition des nombres constructibles (complexes et réels) | quelques exemples de constructions | théorème de Gauss-Wantzel | polygones constructibles : DEV 1 | exemple : construction du pentagone

D1

Théorème. 1. Soit $n \geq 3$ et $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ sa décomposition en facteurs premiers. Alors, $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ est constructible si et seulement si les $e^{\frac{2i\pi}{p_j^{\alpha_j}}}$ sont constructibles ;

2. $\forall \alpha \in \mathbb{N}, e^{\frac{2i\pi}{2^\alpha}}$ est constructible ;

3. Soient $p \geq 3$ un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Alors, $e^{\frac{2i\pi}{p^\alpha}}$ est constructible si et seulement si $\alpha = 1$ et p est un nombre premier de Fermat (i.e. de la forme $p = 2^m + 1$).

[Car01], IV.2 et X.4.1

4 Applications en théorie des groupes.

4.1 Groupes finis et caractères.

[Ber20], XII.3 et XII.5 et [Pey04], I.1-2

~ 5 items.

définition caractère linéaire | si $|G| = n$, caractère = morphisme $G \rightarrow \mathbb{U}_n$ | exemples : $\widehat{\mathbb{Z}}$, $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$, $\widehat{\mathfrak{S}_n}$ |
prolongement des caractères | théorème de classification des GAF | corollaire : isomorphisme $G \simeq \widehat{\widehat{G}}$

4.2 Transformée de Fourier discrète.

[Pey04], I.1-2 et I.4

~ 8 items.

définition espace des fonctions sur G , produit scalaire hermitien | les caractères forment une b.o.n.
| définition transformée de Fourier discrète | formule d'inversion | formule de Plancherel | définition
produit de convolution, structure d'algèbre | convolution et transformée de Fourier | application :
déterminant circulant

Références

- [Gri90] J. GRIFONE. *Algèbre linéaire*. CÉPADUÈS, 1990. ISBN : 9782383951346.
- [AF93] J.M. ARNAUDIÈS et H. FRAYSSE. *Cours de mathématiques tome 1 : Algèbre*. DUNOD, 1993. ISBN : 9782040164508.
- [Per96] D. PERRIN. *Cours d'algèbre (Agrégation)*. ELLIPSES, 1996. ISBN : 9782729855529.
- [Car01] J.C. CARREGA. *Théorie des corps : La règle et le compas*. HERMANN, 2001. ISBN : 9782705614492.
- [Pey04] G. PEYRÉ. *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*. ELLIPSES, 2004. ISBN : 9782729818678.
- [FGN09] S. FRANCINO, H. GIANELLA et S. NICOLAS. *Exercices de mathématiques : Oraux x-ens, algèbre 2*. CASSINI, 2009. ISBN : 9782842250911.
- [Goz09] I. GOZARD. *Théorie de Galois : Niveau L3-M1*. ELLIPSES, 2009. ISBN : 9782729842772.
- [QQ17] H. QUEFFÉLEC et M. QUEFFÉLEC. *Analyse complexe et applications*. CALVAGE&MOUNET, 2017. ISBN : 9782916352596.
- [Ber20] G. BERHUY. *Algèbre : le grand combat*. CALVAGE&MOUNET, 2020. ISBN : 9782916352831.