

Leçon 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Généralités sur les actions de groupes.

1.1 Définitions.

[Per96], I.4 et [Ulm21], IV

~ 10 items.

Donner les définitions de base en agrémentant d'exemples : $G \curvearrowright G$ par translation à gauche/droite (théorème de Cayley en application), par conjugaison (type des permutations), $\mathfrak{S}_n \curvearrowright \llbracket 1; n \rrbracket$, $GA(\mathcal{E}) \curvearrowright \mathcal{E}$, actions sur des matrices... J'aime bien le Perrin pour l'organisation de la partie même si il manque quelques définitions à mon avis (action libre, n -transitive...), on peut en retrouver certaines dans le Ulmer.

1.2 Formule des classes.

[Ulm21], VII et [CP22], III.6.1

~ 5-10 items.

Le Ulmer est très bien pour cette sous-section (sauf la définition de p -groupe qui n'est pas la définition usuelle). On peut quand-même rajouter la formule de Burnside qui ressemble à la formule des classes (on la trouve dans le carnet de voyage en Algébrerie).

1.3 Invariants et formes normales.

ref à déterminer et [Rom21], VI

~ 5 items.

Pas vraiment de ref pour les définitions mais y'en a que 2 pas très dures. Illustrer via les actions simples présentées au début (type des permutations...). Donner quelques exemples pour des actions sur des matrices (dans le Rombaldi), mais on en parlera plus précisément dans la sous-section "actions du groupe linéaire".

2 Exemples d'actions de groupes.

2.1 Produit semi-direct.

[Per96], I.6 et [Cal14], V.4

~ 5-10 items.

Suivre le Perrin. Le Calais est aussi vraiment bien pour cette sous-section même si un peu difficile à lire (les versions trouvables en ligne en tout cas).

2.2 Actions du groupe linéaire.

[Rom21], VI, [Aud06], VI.5-6

~ 10 items.

Donner les résultats du Rombaldi qu'on a pas présentés dans la partie précédente (peut-être les rappeler en remarque). Parler de l'action sur les décompositions en sommes directes pour introduire le développement 1. Parler rapidement de l'action $PGL(E) \curvearrowright P(E)$.

D1

Théorème. Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $a(u) := \inf\{p \in \mathbb{N}, \ker(u^p) = \ker(u^{p+1})\}$ et $d(u) := \inf\{q \in \mathbb{N}, \operatorname{im}(u^q) = \operatorname{im}(u^{q+1})\}$. On a alors

$$a(u) = d(u) =: p, \quad E = \ker(u^p) \oplus \operatorname{im}(u^p), \quad u|_{\ker(u^p)} \text{ est nilpotent et } u|_{\operatorname{im}(u^p)} \text{ est inversible.}$$

De plus, une telle décomposition de E caractérise entièrement u .

Application. Il y a $q^{d(d-1)}$ matrices nilpotentes dans $M_d(\mathbb{F}_q)$.

[CP22], I.3.67

2.3 Actions de groupes en géométrie.

[Aud06], VI.6 et [CG18], XII et XIII.B

~ 10 items.

Parler du birapport pour faire la transition avec la sous-section précédente (dans le Audin). Groupe diédral et groupes d'isométries des solides platoniciens (tout dans le NH2G2 tome 2).

D2

Théorème. Les groupes d'isométries du cube sont $Is^+(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $Is(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

[CG18], XII.3.5

Remarque : si on a le temps et l'espace, on peut aussi faire les groupes d'isométries du tétraèdre.

3 Applications.

3.1 Théorèmes de Sylow.

[Per96], I.5

~ 5-10 items.

Suivre le Perrin.

3.2 Étude de $\mathfrak{S}_n$.

[Per96], I.8

~ 5-10 items.

Pareil.

Dbon

Théorème. Pour $n \neq 6$, les automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ sont intérieurs.

[Per96], I.8

Références

- [Per96] D. PERRIN. *Cours d'algèbre (Agrégation)*. ELLIPSES, 1996. ISBN : 9782729855529.
- [Aud06] M. AUDIN. *Géométrie*. EDP SCIENCES, 2006. ISBN : 9782868838834.
- [Cal14] J. CALAIS. *Éléments de théorie des groupes*. PUF, 2014. ISBN : 9782130633471.
- [CG18] P. CALDERO et J. GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries Tome 2*. CALVAGE&MOUNET, 2018. ISBN : 9782916352671.
- [Rom21] J.E. ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. DEBOECK, 2021. ISBN : 9782807332201.
- [Ulm21] F. ULMER. *Théorie des groupes*. ELLIPSES, 2021. ISBN : 9782340059306.
- [CP22] P. CALDERO et M. PERONNIER. *Carnet de voyage en Algérie*. CALVAGE&MOUNET, 2022. ISBN : 9782493230034.