

Théorème (Weier) Soient f continue sur $[0,1]$
 Alors $(f_n)_n$ est équivalente à
 (i) $f_n \rightarrow f$ uniformément
 (ii) $f \in C^1([0,1])$, $f'(x) = f'(x)$, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(k/n) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$
 (iii) $f \in C^1([0,1])$ et $f'(x) = f'(x)$

Plan (i) $\Leftrightarrow$ (ii) pour (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

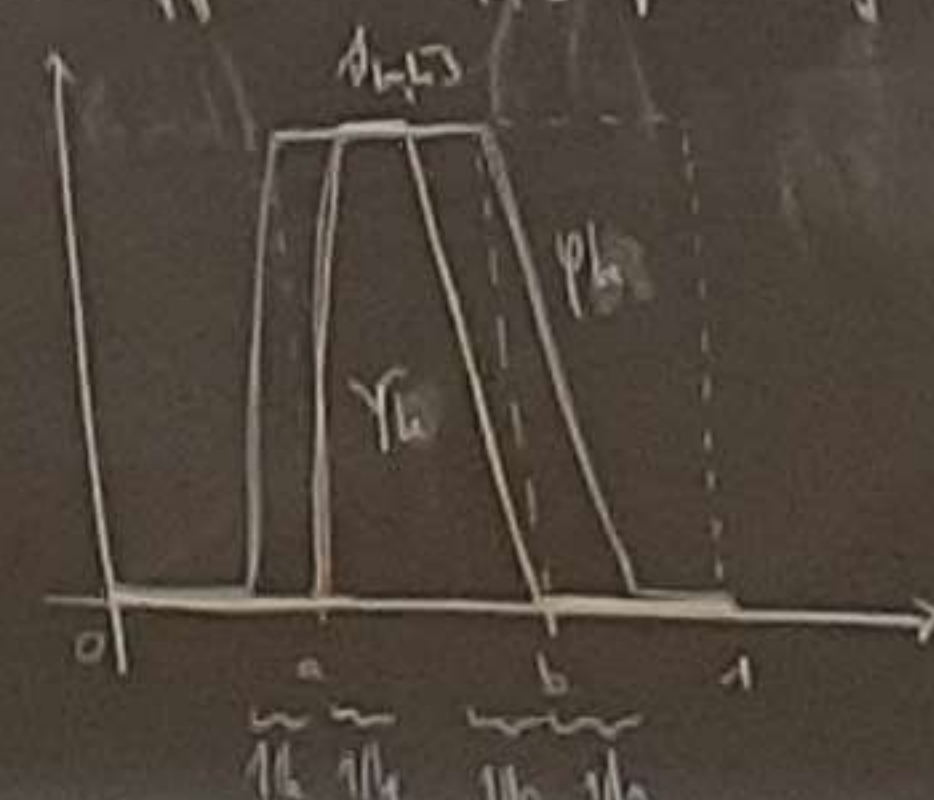
Rappel $(f_n)_n$ est EQR si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(k/n) = \int_0^1 f(x) dx$
 $= \int_0^1 f(x) dx$ pour $f \in C([0,1])$

Def $X_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \delta_{k/n}(t)$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Notons $P_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(k/n)$
 Soit f_n est EQR, alors $P_n(f) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$
 de plus, montrons (ii) pour $f \in C^1([0,1])$.
 La dérivée de la somme est la somme des dérivées, elle est
 une somme finie de fonctions continues.
 On obtient ainsi la continuité de l'application uniforme.
 Soit $f \in C^1([0,1])$ continue. Soit $g \in C([0,1])$
 telle que $\|f - g\|_\infty \leq \epsilon$.

Alors $\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(k/n) - \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(k/n) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n g(k/n) \right|$ ①
 $+ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n g(k/n) - \int_0^1 g(x) dx \right|$ ②
 $+ \left| \int_0^1 g(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \right|$ ③

On a ⑤ $\leq (1-\alpha) \|g - f\|_\infty \leq \epsilon / \alpha = \epsilon / (1-\alpha)$
 et ① $\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \|g - f\|_\infty \leq \epsilon$ pour $n \geq \frac{1}{\epsilon}$
 et pour $g \in C$, ② $\leq \epsilon$ après.
 Mais $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(k/n) - \int_0^1 f(x) dx \leq 3\epsilon$
 (ii) $\Rightarrow$ (i) Soient $x \in [0,1]$.
 On veut approximer $f(x)$ par des fonctions continues.



Alors pour k assez grand,
 ψ_k, ψ_k continues;
 $\psi_k(0) = \psi_k(1) = \psi_k(x) = \psi_k(1) = 0$,
 $\psi_k \leq 1/n \leq \psi_k$
 De plus, $\int_0^1 \psi_k = b-a = \frac{1}{n}$
 $\int_0^1 \psi_k = b-a + \frac{1}{n}$
 Alors, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \psi_k(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \psi_k(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \psi_k(x)$
 $b-a = \frac{1}{n}$ $b-a = \frac{1}{n}$
 donc $b-a = \frac{1}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \psi_k(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \psi_k(x) = b-a = \frac{1}{n}$
 $b-a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \psi_k(x) \right)$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) On applique $P_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(k/n)$ avec $f(x) = f(x) = 1$.
 (iii) $\Rightarrow$ (ii) On veut que la fonction
 $f \in C([0,1])$, $f(x) = f(x)$ de la forme de
 polynôme trigonométrique (Fejér).
 On remarque comme dans (i) $\Rightarrow$ (ii).
 $\|f - g\|_\infty \leq \epsilon$
 avec $g(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(k/n)$
 $P_n(f)$ étant une fonction continue
 et $P_n(f)$ étant également continue.

Application $\{m_n\}$ est EQR
 $m \neq 0$.
 Soient $x \in [0,1]$, $\theta = \frac{x}{n}$, $q, n \in \mathbb{N}$,
 alors $\{m_n\}$ est EQR si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n m_k = \int_0^1 m(x) dx$
 Donc $\{m_n\}$ est EQR si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n m_k = \int_0^1 m(x) dx$
 $x = 0 \notin \mathbb{Q}$, $x \notin \mathbb{Q}$.
 $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{2\pi k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{2\pi k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{2\pi k}{n}$
 $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{2\pi k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{2\pi k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{2\pi k}{n}$
 Or $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{2\pi k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{2\pi k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{2\pi k}{n}$
 $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{2\pi k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{2\pi k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{2\pi k}{n}$

Théorème (Weier) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0, 1]$.

Alors on a l'équivalence

(i) (u_n) est équirépartie modulo 1 ;

(ii) $\forall f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$, $f(0) = f(1)$: $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t) dt$;

(iii) $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $(e^{2\pi i p u_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 au sens de Cesàro.

Plan (i) $\Leftrightarrow$ (ii) puis (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

Rappel $(u_n)_n$ est EQR si : $\frac{\text{Card}(\{k \in [1, n] \mid u_k \in [a, b]\})}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b - a$
 $= \frac{1}{n} X_n(a, b)$ $\forall a < b$ dans $[0, 1]$.

Def $X_n(a, b) = \sum_{k=1}^n 1_{[a, b]}(u_k)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) | Notons $P(f) : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t) dt$.

(u_n) est EQR, alors $P(f)$ est vraie pour les indicateurs de segments. Montrons $P(f)$ pour $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$.

Par linéarité de la somme et de l'intégrale, elle est vraie pour les fonctions en escalier.

On utilise maintenant le théorème d'approximation uniforme.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$ continue. Soit $g \in \mathcal{E}([0, 1], \mathbb{C})$ telle que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$.

Alors : $\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) - \int_0^1 f \right| \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(u_k) \right|$ ①
 $+ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(u_k) - \int_0^1 g \right|$ ②
 $+ \left| \int_0^1 g - \int_0^1 f \right|$ ③

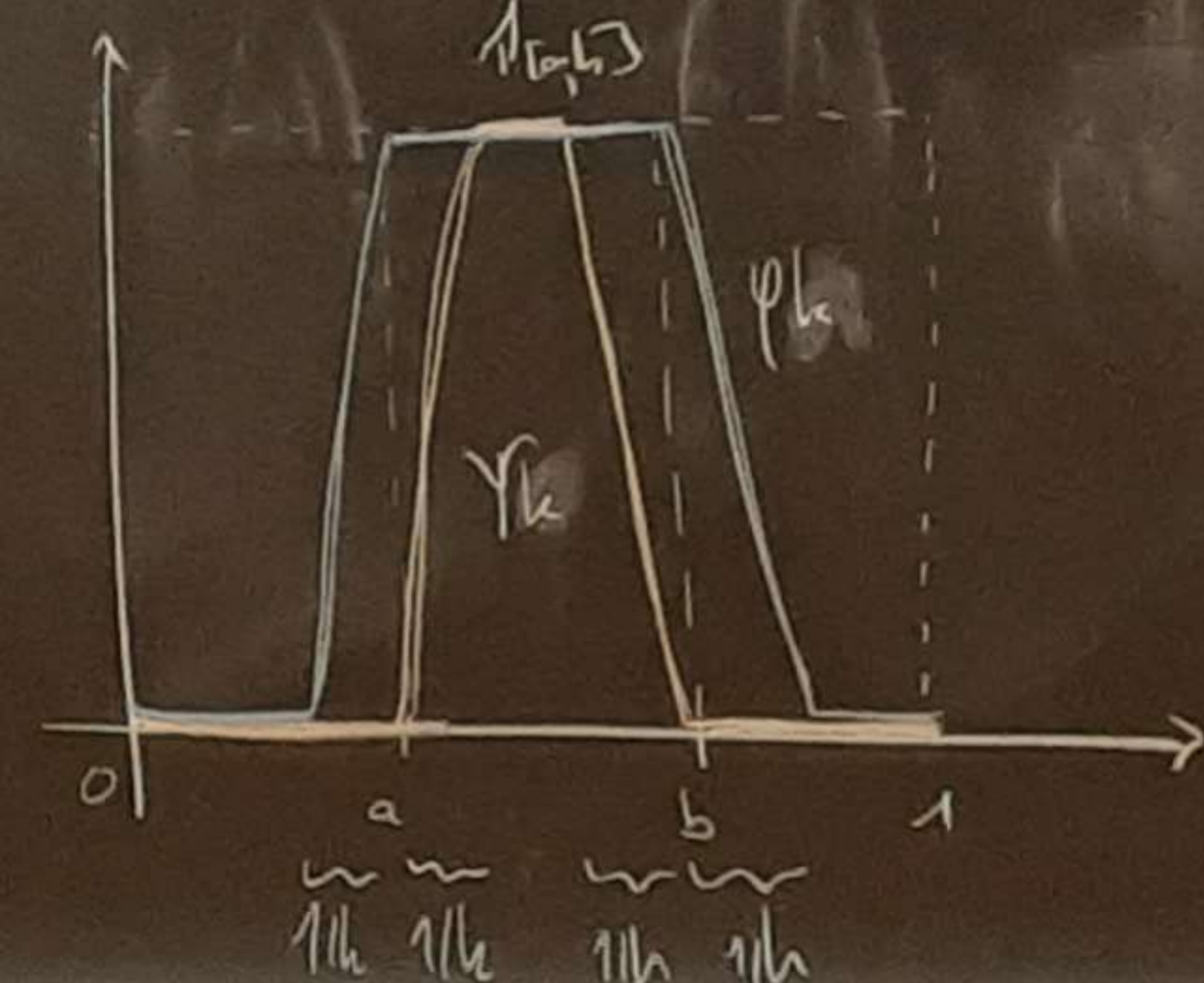
On a ③ $\leq (1 - 0) \|g - f\|_\infty \leq \varepsilon$ par i.v.n.
 et ① $\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$ par i.T.

et comme $g \in \mathcal{E}$, ② $\leq \varepsilon$ après.

Alors à partir de ce rang $\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) - \int_0^1 f \right| \leq 3\varepsilon$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soient $a < b$ dans $[0, 1]$.

On veut approximer $1_{[a, b]}$ par des fonctions continues.



$P(g)$ étant une p.l. linéaire
et $P(u)$ étant également nulle.

$\forall p \in \mathbb{N}^*$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2\pi p i n} - e^{2\pi p i (n+1)}}{e^{2\pi p i n} - 1} = 0$