

Prop. Il existe $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$
continue, croissante, avec $f(0)=f(1)$
et dérivée presque partout de dérivée
nulle.

Principe Ensemble de Cantor

$$C_0 = [0,1]$$

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

$$\text{Inductif } C_{n+1} = \frac{C_n}{3} \cup \frac{2+C_n}{3}$$

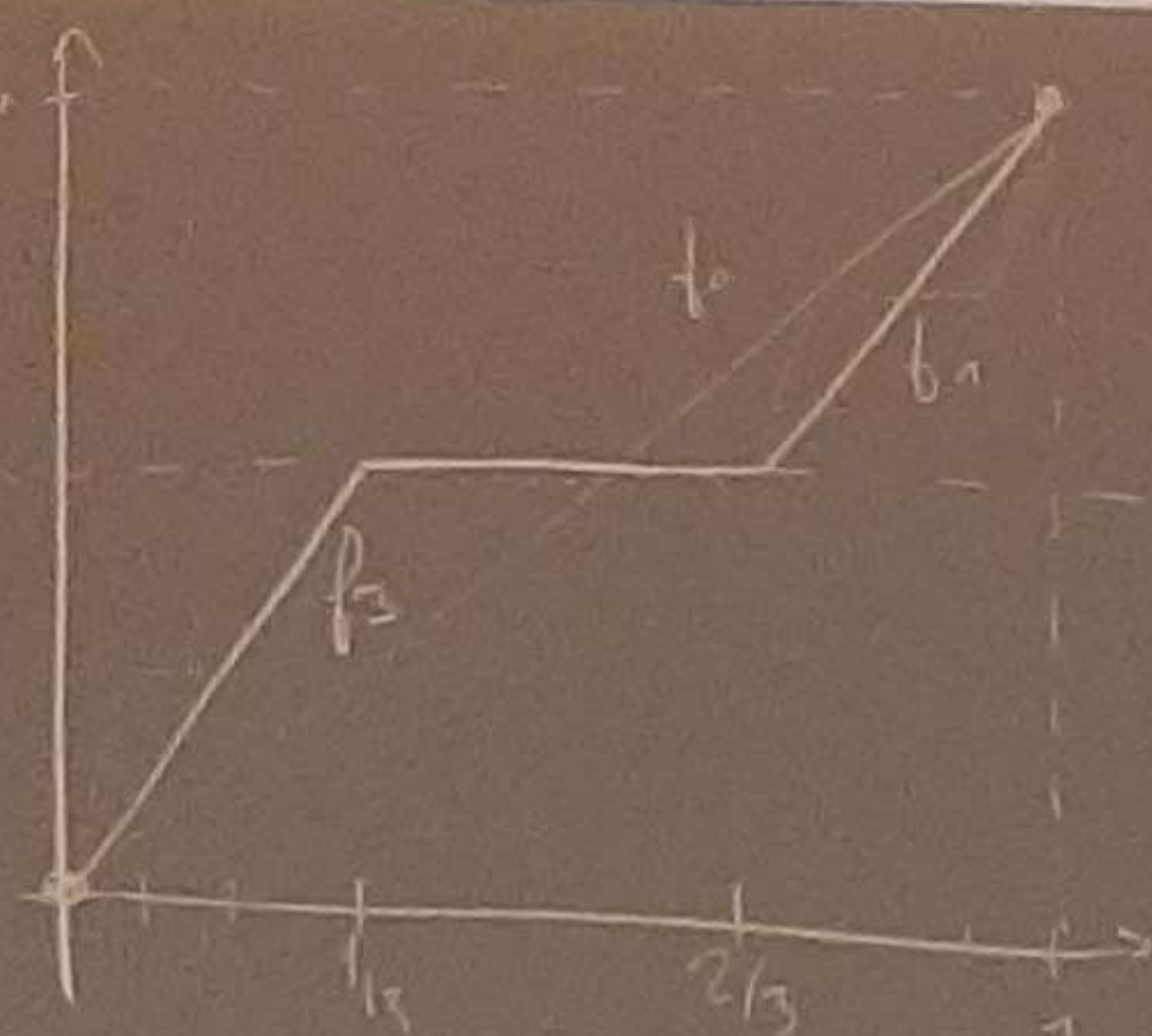
$$\text{Alors } \begin{cases} C_{n+1} \subseteq C_n \\ \partial C_n \subseteq \partial C_{n+1} \end{cases}$$

$$\text{On pose } K = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

$$\text{Comme } \lambda(C_{n+1}) = \frac{2}{3} \lambda(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\lambda(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(C_n) = 0$$

(TLM)



$$\text{Posons } f_n: [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$x \mapsto \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_0^x 1_{C_n}(t) dt$$

Alors * $f_n(0)=0, f_n(1)=1$,
* f_n est continue, car 1_{C_n} est bornée,
* $f_n \nearrow$, car $1_{C_n} \geq 0$

But Montrer que (f_n) converge, et
condition $f = \lim f_n$.

* Soit S un des segments composant C_n .

$$\text{Alors } \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_S 1_{C_n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_S 1_{C_n} \quad (*)$$

$$\text{En effet, } \lambda(S \cap C_{n+1}) = \frac{2}{3} \lambda(S \cap C_n)$$

$$= \frac{2}{3} \lambda(S) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^n}$$

$$= \frac{2}{3^{n+1}}$$

D'autre part, f_n est constante sur
les 2^{n-1} segments ouvrant composant C_n ,
de même pour f_{n+1} car $C_n \subseteq C_{n+1}$.

Soit donc $x \in C_n$. Alors

$$f_{n+1}(x) = \sum_{S \subseteq C_{n+1} \text{ ou } x \notin C_{n+1}} \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \int_S 1_{C_{n+1}} = \sum_{S \subseteq C_n \text{ ou } x \notin C_n} \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_S 1_{C_n}$$

$$= f_n(x)$$

Par continuité à gauche, $f_{n+1}(x) = f_n(x)$

Soit $x \in S$ ou

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+1}(x) - f_{n+1}(x)|$$

$$+ |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \int_S 1_{C_{n+1}}$$

$$+ \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_S 1_{C_n}$$

$$\leq 2 \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$(*)$$

et cette dernière vaut pour
 $x \in C_n$ par la remarque 2.

$$\text{Donc } \|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

Par télescopage, comme $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$
converge, on a

$$\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$$

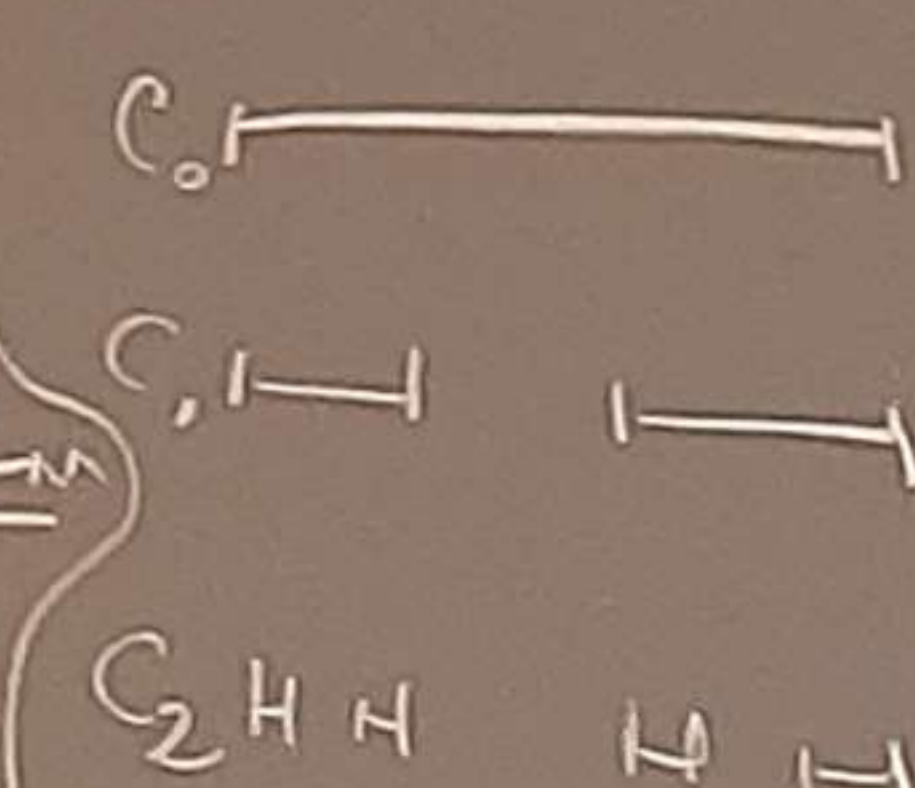
Donc (f_n) est de Cauchy
dans $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, complété,
donc CUV pour f .

On a alors
* $f(0)=0, f(1)=1$ (CVS)
* $f \nearrow$ (CVS)
* $f \in C^0$ (CVU)

* $\forall x \in C_n$ et un des
segments ouvrant composant C_n ,
f est constante sur U et
 $f|_U = f_n|_U$
pour $n \geq 0$, d'où $f|_U = f_n|_U$
donc f est dérivable sur U ,
de dérivée nulle.
Ceci vaut pour tout K^c ,
de même dérivée nulle. $\square$

Prop Il existe $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$
continue, croissante, avec $f(0)=f(1)$
et dérivable presque partout de dérivée
nulle.

Préparer Ensemble de Cantor.

$$\begin{aligned} C_0 &= [0,1] \\ C_1 &= [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] \\ \text{Inductif } C_{n+1} &= \frac{C_n}{3} \cup \frac{2+C_n}{3} \end{aligned}$$


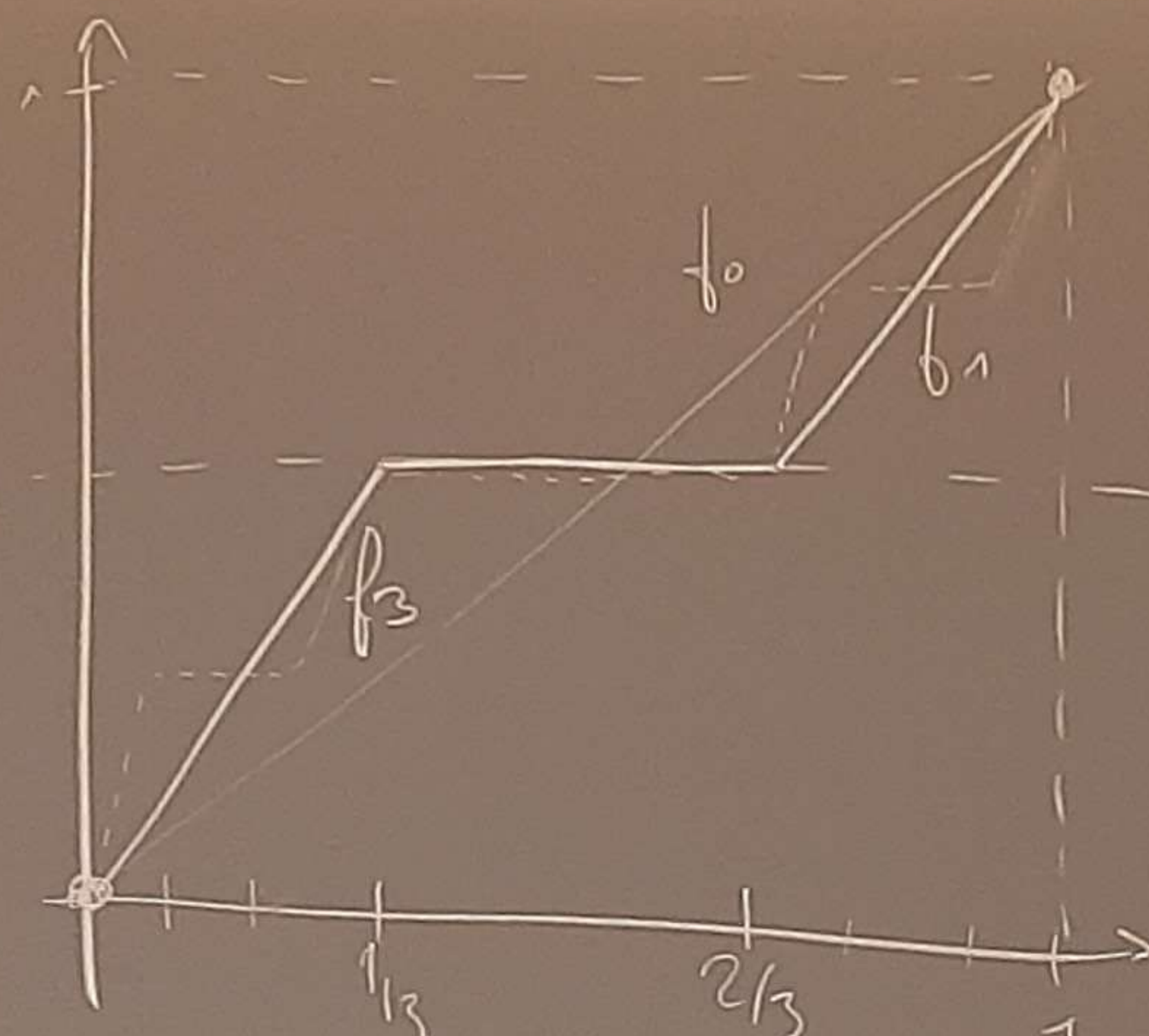
Alors $\begin{cases} C_{n+1} \subseteq C_n \\ \partial C_n \subseteq \partial C_{n+1} \end{cases}$

On pose $K = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$

Comme $\lambda(C_{n+1}) = \frac{2}{3} \lambda(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\lambda(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(C_n) = 0$

(TLM)



Posez $f_n: [0,1] \rightarrow [0,1]$
 $x \mapsto \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_0^x 1_{C_n}(t) dt$

Alors $\begin{aligned} & \star f_n(0)=0, f_n(1)=1, \\ & \star f_n \text{ est continue, car } 1_{C_n} \text{ est bornée,} \\ & \star f_n \nearrow, \text{ car } 1_{C_n} \geq 0. \end{aligned}$

But Montrer que (f_n) converge, et
considérer $f = \lim f_n$.

$\star$ Soit S un des segments composant C_n .

Alors $\boxed{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \int_S 1_{C_{n+1}} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_S 1_{C_n}} \quad (*)$

En effet, $\begin{aligned} \lambda(S \cap C_{n+1}) &= \frac{2}{3} \lambda(S \cap C_n) \\ &= \frac{2}{3} \lambda(S) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^n} \\ &= \frac{2}{3^{n+1}} \end{aligned}$

$\star$ D'autre part, f_n est constante sur
les 2^{n-1} segments ouverts composant C_n^c ,
de même pour f_{n+1} car $C_n^c \subseteq C_{n+1}^c$.

Soit donc $x \in C_n^c$. Alors

$f_n(x) = \sum_{S \subseteq C_n} \dots$

Pour continuité

Soit $x \in S$

$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \dots$

Couvrage, et

composant C_n -

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \int_S 1_{C_n} - (*)$$

$$= \frac{2}{3} \lambda(S \cap C_n)$$

$$= \frac{2}{3} \lambda(S) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^m}$$

$$= \frac{2}{3^{m+1}}$$

constante sur

composant C_n ,

$$C_n^c \subseteq C_{n+1}^c$$

Alors

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{\substack{S \subseteq C_n[0,1] \\ \text{ou } x \in C_n}} \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_S 1_{C_n} = \sum_{\substack{S \subseteq C_{n+1}[0,1] \\ \text{ou } x \in C_{n+1}}} \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \int_S 1_{C_{n+1}} \\ &= f_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Par continuité à gauche, $f_n(\min S) = f_{n+1}(\min S)$.

Soit $x \in S$ on a

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) - f(x)| &\leq |f_{n+1}(x) - f_{n+1}(\min S)| \\ &\quad + |f_n(\min S) - f_n(x)| \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \int_{\min S}^x 1_{C_{n+1}}$$

$$+ \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_{\min S}^x 1_{C_n}$$

$$\leq 2 \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

(*)

et cette inégalité vaut pour
 $x \in C_n^c$ par la remarque 2.

$$\text{Donc : } \|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Par télescopage, comme $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
converge, on a :

$$\|f_p - f_q\|_\infty \xrightarrow{p, q \in \mathbb{N}} 0$$

Donc $(f_n)_n$ est de Cauchy
dans $(C^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, complet,
donc CVU vers f .

On a alors :

$$* |f| = 0 \text{ et } f(1) = 1 \quad (VS)$$

$$* f \geq 0 \quad (VS)$$

$$* f \in C^0 \quad (CVU)$$

* si $U \subseteq C_n^c$ et un des
segments ouverts composant C_n^c ,
donc est un U et

$$f_n|_U = f_{n+1}|_U$$

pour $n \geq n_0$, d'où $f|_U = f_{n_0}|_U$

donc f est dérivable sur U ,
de dérivée nulle.

Ceci vaut dans tout K^c ,

de même totale.

□