

Critère de Sylvester et application

Leçons : 149, 157, 170, 171

Référence : X. Gourdon, *Algèbre*, p. 259.

Théorème 1 (Critère de Sylvester). *Soit $M = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice symétrique réelle. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $D_k = \det(M_k)$ où $M_k = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$. Alors, pour que M soit définie positive, il faut et il suffit que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $D_k > 0$.*

Démonstration.

Lemme 2. *Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique sur E . Soit F un s.e.v. de E de dimension p . Si $q|_F$ est définie, alors $F \oplus F^\perp = E$.*

Démonstration du lemme. Notons φ la forme bilinéaire symétrique associée à q .

- Montrons d'abord que $F \cap F^\perp = \{0\}$.

Soit $x \in F \cap F^\perp$. Donc x est orthogonal à lui-même, donc $\varphi(x, x) = 0$, donc $q|_F(x) = 0$, donc $x = 0$ car $q|_F$ est définie.

- Montrons que $F + F^\perp = E$.

Soit $e_1, \dots, e_p$ une base φ -orthogonale de F . Soit $x \in E$. Posons

$$y = \sum_{i=1}^p \frac{\varphi(x, e_i)}{\varphi(e_i, e_i)} e_i \in F.$$

Pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(x - y, e_j) &= \varphi(x, e_j) - \sum_{i=1}^p \frac{\varphi(x, e_i)}{\varphi(e_i, e_i)} \varphi(e_i, e_j) \\ &= \varphi(x, e_j) - \varphi(x, e_j) \\ &= 0, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé $\varphi(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$. Donc $x - y \in F^\perp$, et par suite $x = y + (x - y)$, d'où $F \oplus F^\perp = E$. CQFD

On procède maintenant à la preuve du théorème.

($\Rightarrow$) Supposons que M soit définie positive. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit q la forme quadratique canonique associée à M . Alors M_k est la matrice de $q|_{\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)}$, qui est aussi définie positive, donc $\det(M_k) > 0$.

($\Leftarrow$) On procède par récurrence sur n .

Si $n = 1$, le résultat est vrai.

Soit $n \geq 2$. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n - 1$. Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\det(M_k) > 0$.

En particulier, $M_{n-1} \in S_{n-1}(\mathbb{R})$ vérifie que tous ses mineurs principaux sont > 0 , donc, par hypothèse de récurrence, M_{n-1} est définie positive.

Posons $H = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ où $e_1, \dots, e_n$ est la base canonique. On a donc $q|_H$ qui est définie positive. D'après le lemme, $H \oplus H^\perp = E$.

Si $e'_1, \dots, e'_{n-1}$ est une base q -orthogonale telle que $\text{Mat}_{\beta'}(q|_H) = I_{n-1}$, et si e'_n est un vecteur non nul de $H^\perp$, alors la matrice de q dans la base $e'_1, \dots, e'_n$ est

$$N = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = {}^t P M P,$$

où P est la matrice de passage de la base canonique vers la base $e'_1, \dots, e'_n$.

On a alors

$$\alpha = \det(N) = \det(M) \det(P)^2,$$

avec $\det(M) > 0$ et $\det(P)^2 > 0$, donc $\alpha > 0$, donc q est définie positive, donc M est définie positive. $\square$

Application : On va montrer que la matrice

$$B = \left(\frac{1}{1 + |i - j|} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

Lemme 3. Soit $M : [0, 1] \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, $t \mapsto M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$ une application continue. Si $\forall t \in]0, 1[, M(t) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $A = \int_0^1 M(t) dt \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Démonstration du lemme. Supposons que $\forall t \in]0, 1[, M(t) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

On a alors $\forall t \in]0, 1[, {}^t X M(t) X > 0$, et par continuité de $t \mapsto {}^t X M(t) X$, on a :

$$\int_0^1 {}^t X M(t) X dt > 0.$$

Donc,

$${}^t X \left(\int_0^1 M(t) dt \right) X > 0,$$

d'où $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

CQFD

Posons maintenant,

$$M : \begin{matrix} [0, 1] & \rightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & (t^{|i-j|})_{1 \leq i, j \leq n} \end{matrix}.$$

Montrons que $\forall t \in]0, 1[, M(t) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Pour cela, on va utiliser le critère de Sylvester démontré précédemment.

Soit $t \in]0, 1[$. Montrons par récurrence sur $r \geq 1$ que

$$D_r = (1 - t^2)^{r-1}.$$

$r = 1$: $D_1 = 1$, donc le résultat est vrai.

Soit $r \geq 2$. Supposons le résultat vrai au rang $r - 1$. On a :

$$D_r = \begin{vmatrix} 1 & t & \dots & t^{r-2} & t^{r-1} \\ t & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & t \\ t^{r-1} & t^{r-2} & \dots & t & 1 \end{vmatrix}.$$

En effectuant $C_r \leftarrow C_r - t C_{r-1}$, il vient,

$$D_r = (1 - t^2) D_{r-1} \stackrel{\text{d'après H.R}}{=} (1 - t^2)^{r-1}.$$

Donc, par le principe de récurrence,

$$D_r = (1 - t^2)^{r-1}, \quad \forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

D'après le critère de Sylvester, $M(t) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, et par le lemme,

$$B = \int_0^1 M(t) dt \in S_n^{++}(\mathbb{R}).$$