

Réduction des endomorphismes normaux

Leçons : 148, 150, 151, 158

Référence : J.-E. Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*, p. 743.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

On note :

- $\mathcal{N}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u^*u = uu^*\},$
- $\mathcal{P}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u^* \in \mathbb{R}[u]\}.$

Théorème 1 (Réduction). *Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. Il existe une base orthonormée β de E telle que*

$$\text{Mat}_\beta(u) = \begin{pmatrix} D_p & & 0 \\ & R_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & R_r \end{pmatrix}$$

où D_p est diagonale de taille p et $R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$, $b_k \neq 0$, $\forall k$.

Application : $\mathcal{P}(E) = \mathcal{N}(E)$.

Démonstration du théorème.

Lemme 2. *Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , alors $F^\perp$ est aussi stable par u .*

Démonstration du lemme. Dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$, la matrice A de u dans cette base s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit de montrer que $A_2 = 0$. Par normalité de u , on a :

$$A^t A - {}^t A A = 0, \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} A_2^t A_2 & A_2^t A_3 - {}^t A_1 A_2 \\ A_3^t A_2 - {}^t A_2 A_1 & {}^t A_2 A_2 \end{pmatrix} = 0.$$

donc en particulier, $\text{Tr}({}^t A_2 A_2) = 0$, et comme $(A, B) \mapsto \text{Tr}({}^t A B)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$, $A_2 = 0$ et $F^\perp$ est stable par u . CQFD

Lemme 3. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un s.e.v. P de E de dimension 1 ou 2 stable par u .*

Démonstration du lemme. Si u admet une valeur propre réelle associée à un vecteur propre $x \in E \setminus \{0\}$, alors $P = \text{Vect}(x)$ est stable par u .

Supposons donc que u n'admet pas de valeur propre réelle. Notons alors $\pi_u = (X^2 + bX + c)Q(X)$ avec $b^2 - 4c < 0$ et $Q(u) \neq 0$. On a

$$\pi_u(u) = (u^2 + bu + c \text{id}) \circ Q(u) = 0,$$

donc $\text{Ker}(u^2 + bu + c \text{id}) \neq \{0\}$. Soit $x \in \text{Ker}(u^2 + bu + c \text{id}) \setminus \{0\}$. Posons $P = \text{Vect}(x, u(x))$. u n'admet pas de valeur propre réelle donc $\dim(P) = 2$, et on a

$$u(u(x)) + bu(x) + cx = 0,$$

donc $u(u(x)) = -bu(x) - cx \in P$, donc P est stable par u . CQFD

Lemme 4. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. Il existe des s.e.v. de E $P_1, \dots, P_r$, de dimension égale à 1 ou 2, deux à deux orthogonaux, stables par u , tels que

$$E = \bigoplus_{j \in \llbracket 1, r \rrbracket} P_j.$$

Démonstration du lemme. Par récurrence sur $\dim(E)$. Si $n = 1$ ou 2 , c'est clair.

Supposons le résultat vrai pour tout endomorphisme normal d'un espace euclidien de dimension $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Supposons que $\dim(E) = n$. D'après le lemme précédent, il existe P_1 de dimension 1 ou 2 stable par u . D'après le lemme 2, $P_1^\perp$ est stable par u . u induit ainsi un endomorphisme normal u_1 sur $P_1^\perp$ et

$$\dim(P_1^\perp) = n - \dim(P_1) \leq n - 1.$$

Donc, par hypothèse de récurrence, on peut trouver $P_2, \dots, P_r$ deux à deux orthogonaux, de dimension 1 ou 2, stables par u_1 (et donc par u) tels que

$$P_1^\perp = \bigoplus_{j \in \llbracket 2, r \rrbracket} P_j,$$

et on a :

$$E = P_1 \oplus P_1^\perp = \bigoplus_{j \in \llbracket 1, r \rrbracket} P_j.$$

CQFD

Lemme 5. Soit E de dimension 2 et $u \in \mathcal{N}(E)$. Alors, si u possède une valeur propre réelle, il est diagonalisable dans une b.o.n. Sinon, pour toute base orthonormée β de E ,

$$\text{Mat}_\beta(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad b \neq 0.$$

Démonstration du lemme. Si u possède une valeur propre réelle, alors il existe un vecteur unitaire e_1 tel que $u(e_1) = d e_1$ et $\text{Vect}(e_1)^\perp$ est une droite stable par u , donc u est diagonalisable dans une b.o.n.

Supposons $\text{Sp}(u) \cap \mathbb{R} = \emptyset$. Soit β une b.o.n. quelconque de E et notons

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{Mat}_\beta(u).$$

Par normalité, on obtient

$$\begin{pmatrix} c^2 - b^2 & ab + cd - ac - bd \\ ab + cd - ac - bd & b^2 - c^2 \end{pmatrix} = 0,$$

donc $b = \pm c$ et $(a - d)(b - c) = 0$.

Si $b = 0$, alors $c = 0$ et A est diagonale, ce qui n'est pas le cas, donc $b \neq 0$.

Si $b = c$, A est symétrique et

$$\chi_A(X) = X^2 - (a+d)X + ad - b^2, \quad \Delta = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0,$$

donc χ_A possède 2 racines, ce qui est absurde car A ne possède pas de valeur propre.

Donc, $b = -c$ et $a = d$, d'où

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

CQFD

On peut maintenant prouver le théorème. Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

Pour $n = 1$, c'est clair. Pour $n = 2$, on l'a fait avec le lemme précédent.

Supposons le résultat vrai pour les endomorphismes normaux dans des espaces de dimension $p \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$. Supposons $\dim(E) = n$ et soit $u \in \mathcal{N}(E)$.

Si u admet une valeur propre réelle d_1 , alors pour tout vecteur unitaire e_1 associé à d_1 , $H = \text{Vect}(e_1)^\perp$ est stable par u . u induit un endomorphisme normal u_H sur H , qui est de dimension $n-1$, donc par hypothèse de récurrence, on peut trouver β_H base orthonormée de H telle que

$$\text{Mat}_{\beta_H}(u_H) = \begin{pmatrix} D_p & & 0 \\ & R_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & R_r \end{pmatrix} = A_H.$$

Dans la base orthonormée $\{e_1\} \cup \beta_H$, la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & A_H \end{pmatrix},$$

qui est bien de la forme souhaitée.

Supposons alors que $\text{Sp}(u) \cap \mathbb{R} = \emptyset$. Donnons-nous alors une décomposition $E = \bigoplus_{1 \leq j \leq r} P_j$ comme dans le lemme précédent. $\beta = \bigcup_h \beta_h$ est une b.o.n. adaptée à cette décomposition, où chaque β_h est une b.o.n. quelconque de P_h . Alors, d'après le lemme sur le cas de la dimension 2, on a :

$$\text{Mat}_\beta(u) = \begin{pmatrix} R_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R_r \end{pmatrix}.$$

□

Démonstration de l'application : $\mathcal{P}(E) = \mathcal{N}(E)$. ($\subset$) évidente.

($\supset$)

Lemme 6. Soit $u \in \mathcal{P}(E)$. Alors il existe un unique $\mu_u \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg(\mu_u) < \deg(\pi_u)$ tel que $u^* = \mu_u(u)$.

Démonstration du lemme. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $u^* = P(u)$. Par division euclidienne de P par π_u , on a :

$$P = Q\pi_u + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(\pi_u).$$

En évaluant en u , on a : $u^* = R(u)$. Posons $\mu_u = R$.

Unicité : Supposons avoir $R \neq R'$ tels que $R(u) = R'(u) = u^*$. Alors, on a $(R - R')(u) = 0$ et $0 < \deg(R - R') < \deg(\pi_u)$, ce qui est absurde. Donc $R = R'$. CQFD

Lemme 7. Soit $u \in \mathcal{P}(E)$. Alors,

- ① $\deg(\mu_u) = 0$ ssi u est scalaire.
- ② si $\deg(\mu_u) = 1$ alors, en notant $\mu_u = \alpha X + \beta$, l'un des 2 cas suivants est vérifié :
 - (i) $\alpha = 1, \beta = 0$ et $u \in S(E)$.
 - (ii) $\alpha = -1, u = a + \frac{\beta}{2}\text{id}, a \in A(E)$.

Démonstration du lemme. ① Si $\deg(\mu_u) = 0$ alors μ_u est constant. Notons $\mu_u = d$, on a donc $\mu_u(u) = d\text{id} = u^*$, donc $u = d\text{id}$. La réciproque est évidente.

② Supposons $\deg(\mu_u) = 1$ et notons $\mu_u = \alpha X + \beta$. On a donc,

$$u^* = \alpha u + \beta \text{id}.$$

En décomposant $u = s + a$, avec $s \in S(E)$, $a \in A(E)$, on a :

$$s - a = \alpha s + \beta \text{id} + \alpha a,$$

donc,

$$\begin{cases} (1 - \alpha)s = \beta \text{id} \\ -a = \alpha a \end{cases}.$$

Si $\alpha \neq -1$, alors $a = 0$ et $u = s \in S(E)$. Si on avait $\alpha \neq 1$, u serait une homothétie, donc ce qui est faux, donc $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.

Si $\alpha = -1$, alors $s = \frac{\beta}{2}\text{id}$ et $u = a + \frac{\beta}{2}\text{id}$. CQFD

On peut maintenant traiter le cas $n = 2$. Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\beta \neq 0$.

On a ${}^t A = -A + 2\alpha I_2$, donc $A \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. A n'est pas une matrice scalaire donc, $\deg(\mu_A) \geq 1$.

Et, on a $\chi_A = X^2 - 2\alpha X + \alpha^2 + \beta^2 = (X - \alpha)^2 + \beta^2$. On a clairement $\pi_A = \chi_A$ donc $\deg(\mu_A) < 2$, donc $\deg(\mu_A) = 1$ et A n'est pas symétrique, donc,

$$\boxed{\mu_A = -X + 2\alpha}$$

et d'après le lemme précédent, $P \in \mathbb{R}[X]$ est tel que $P(A) = {}^t A$ si, et seulement si, $\pi_A \mid P - \mu_A$.

Lemme 8. $(P(A) = {}^t A)$ ssi $(P(\alpha + i\beta) = \alpha - i\beta)$.

Démonstration du lemme. En effet, dire que

$$\pi_A = (X - \alpha)^2 + \beta^2 = (X - \alpha - i\beta)(X - \alpha + i\beta) \in \mathbb{C}[X],$$

donc $\pi_A \mid P - \mu_A$ ssi $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ sont racines de $P - \mu_A$, donc, on a :

$$P(\alpha + i\beta) - (\alpha + i\beta) + 2\alpha = 0,$$

donc $P(\alpha + i\beta) = \alpha - i\beta$, et de même $P(\alpha - i\beta) = \alpha + i\beta$. CQFD

Cas général : Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. On veut trouver un polynôme P tel que $u^* = P(u)$. Travaillons matriciellement. On note A la matrice de u dans une base adaptée au théorème de réduction.

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est tel que $P(A) = {}^tA$, alors $P(d) = d$ pour toute valeur propre réelle d de A , et $P(z) = \bar{z}$ pour toute valeur propre complexe z de A (cas $n = 2$ juste avant).

Notons $d_1, \dots, d_p$ les valeurs propres réelles de A et $z_1, \dots, z_q$ les valeurs propres complexes de A . D'après l'interpolation de Lagrange, il existe un unique polynôme de degré $p + q - 1$ tel que $P(d_i) = d_i$ et $P(z_j) = \bar{z}_j$. C'est clairement l'unique polynôme de degré minimal vérifiant les conditions souhaitées. Comme les z_j sont deux à deux conjugués, on constate que $\bar{P}$ convient aussi, et $\deg(\bar{P}) = \deg(P)$, donc par unicité, $\bar{P} = P$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.

D'où $\mathcal{P}(E) = \mathcal{N}(E)$. □