

Réduction des endomorphismes nilpotents par dualité

Leçons : 148, 151, 156, 159

Référence : J.-E. Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*, p. 673.

Théorème 1 (Réduction des endomorphismes nilpotents). *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et u un endomorphisme nilpotent de E d'indice $q \geq 1$. Il existe alors une base de E*

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$$

telle que $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $E_i = \text{Vect}(\mathcal{B}_i)$ soit stable par u et que la matrice de $u|_{E_i}$ dans la base $\mathcal{B}_i$ soit

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in M_{q_i}(\mathbb{K}),$$

où $q_i = \dim(E_i)$.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $q \geq 2$ (si $q = 1$, $u = 0$ et il n'y a rien à faire).

Remarque. On rappelle que, comme u est nilpotent d'indice q , ${}^t u$ est également nilpotent d'indice q .

Lemme 2. *Pour tout $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$, la famille $\mathcal{B}_x = (x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est libre et l'espace vectoriel $F_x = \text{Vect}(\mathcal{B}_x)$ est stable par u .*

Démonstration du lemme. Soit $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$ (il en existe car u est nilpotent d'indice q , donc $u^{q-1} \neq 0$).

Montrons que $\mathcal{B}_x = (x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est libre. Supposons par l'absurde qu'il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{q-1} \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0.$$

Soit $p = \min\{k \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket \mid \lambda_k \neq 0\}$. On a $p \leq q-2$, car sinon on aurait $\lambda_{q-1} u^{q-1}(x) = 0$ avec $\lambda_{q-1} \neq 0$ et $u^{q-1}(x) \neq 0$, ce qui est absurde.

Posons, pour $k \in \llbracket p+1, q-1 \rrbracket$, $\mu_k = -\frac{\lambda_k}{\lambda_p}$. On a alors

$$u^p(x) = \sum_{k=p+1}^{q-1} \mu_k u^k(x).$$

Or,

$$\begin{aligned} u^{q-1}(x) &= u^{q-(p+1)}(u^p(x)) \\ &= \sum_{k=p+1}^{q-1} \mu_k u^{q+k-p-1}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{q-p-1} \mu_{p+k} \underbrace{u^{q+k-1}(x)}_{=0 \text{ car } \forall k \geq 1, q+k-1 \geq q}. \end{aligned}$$

Donc $u^{q-1}(x) = 0$, d'où une contradiction.

Donc la famille $\mathcal{B}_x = (x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est libre, et la stabilité de $F_x = \text{Vect}(\mathcal{B}_x)$ suit par nilpotence de u . CQFD

Lemme 3. *Il existe $\varphi \in E^*$ et $x \in E$ tels que l'espace F_x du lemme précédent et l'orthogonal H° de $H = \text{Vect}(\varphi, {}^t u(\varphi), \dots, ({}^t u)^{q-1}(\varphi))$ soient stables par u et vérifient $E = F_x \oplus H^\circ$.*

Démonstration du lemme. D'après le lemme précédent appliqué à l'endomorphisme ${}^t u$ de E^* , il existe $\varphi \in E^*$ tel que $(\varphi, {}^t u(\varphi), \dots, ({}^t u)^{q-1}(\varphi))$ soit libre et que $H = \text{Vect}(\varphi, {}^t u(\varphi), \dots, ({}^t u)^{q-1}(\varphi))$ soit stable par ${}^t u$.

Montrons alors que H° est stable par u . Rappelons que $H^\circ = \{y \in E \mid \forall \varphi \in H, \varphi(y) = 0\}$. Soit $y \in H^\circ$. Montrons que $u(y) \in H^\circ$. Soit $\varphi \in H$. On a

$$\varphi(u(y)) = \underbrace{{}^t u(\varphi)}_{\substack{\in H \text{ car} \\ H \text{ stable par } {}^t u}} \underbrace{(y)}_{\in H^\circ} = 0.$$

y étant quelconque dans H° , on en déduit que H° est stable par u .

$({}^t u)^{q-1}(\varphi)$ étant non nulle, il existe $x \in E$ telle que $({}^t u)^{q-1}(\varphi)(x) \neq 0$, donc $\varphi(u^{q-1}(x)) \neq 0$ et donc $u^{q-1}(x) \neq 0$. Donc, d'après le lemme, on obtient $F_x = \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ stable par u et de dimension q .

Il reste à montrer que $E = F_x \oplus H^\circ$.

D'une part, on a $\dim(F_x) = q$ et $\dim(H^\circ) = n - q$ par dualité, donc on a bien $\dim(E) = \dim(F_x) + \dim(H^\circ)$.

Montrons maintenant que $F_x \cap H^\circ = \{0\}$. Soit

$$y = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) \in F_x \cap H^\circ.$$

Par stabilité de H° , $u^{q-1}(y) \in H^\circ$ et $\varphi \in H$, donc $\varphi(u^{q-1}(y)) = 0$, d'où

$$\varphi(u^{q-1}(y)) = \lambda_0 \underbrace{\varphi(u^{q-1}(x))}_{\neq 0},$$

donc $\lambda_0 = 0$.

On montre alors par récurrence que $\lambda_0 = \dots = \lambda_{q-1} = 0$, et par suite $y = 0$, donc $F_x \cap H^\circ = \{0\}$.

Finalement, on a bien montré que $E = F_x \oplus H^\circ$. CQFD

Il ne reste maintenant plus qu'à effectuer une récurrence forte sur la dimension de E .

Si $n = 1$, $u = 0$, le résultat est vrai.

Soit $n \geq 2$. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n - 1$. Soit donc u nilpotent d'indice $q \geq 1$.

Avec les notations précédentes, la matrice de $u|_{F_x}$ dans la base $\mathcal{B}_x$ est

$$J_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in M_q(\mathbb{K}).$$

Si $q = n$, c'est fini.

Sinon, on décompose $E = F_x \oplus H^\circ$ comme précédemment, et on a alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_q & 0 \\ 0 & A_{n-q} \end{pmatrix},$$

et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $u|_{H^\circ}$. □