

Par 5 points passe une conique

Leçons : 162, 171, 181, 191

Référence : L. Isenmann, T. Pecatte, *L'oral à l'agrégation de mathématiques – Une sélection de développements*, Ellipses (p. 93).

Théorème 1 (Par 5 points passe une conique). *Soit A, B, C, D, E cinq points du plan. Alors :*

- 1) *Il existe une conique qui passe par ces 5 points.*
- 2) *Elle est unique si, et seulement si, il n'existe pas 4 points alignés parmi ces 5.*
- 3) *De plus, si elle est unique, alors elle est dégénérée si, et seulement si, il existe 3 points alignés parmi les 5.*

Démonstration.

Lemme 2. *Soit A, B, C trois points du plan. Toute conique passant par A, B, C a une équation en les coordonnées barycentriques de la forme*

$$pYZ + qXZ + rXY = 0,$$

où (X, Y, Z) désigne les coordonnées barycentriques dans la base affine (A, B, C) .

Démonstration du lemme. Posons $R = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et notons (u, v) les coordonnées dans R . Soit $\mathcal{C}$ une conique passant par (A, B, C) . Son équation est alors de la forme

$$(\mathcal{C}) : au^2 + buv + cv^2 + \alpha u + \beta v + \gamma = 0.$$

On passe en coordonnées barycentriques :

$$u = \frac{Y}{X+Y+Z}, \quad v = \frac{Z}{X+Y+Z}.$$

En remplaçant, il vient alors

$$a \frac{Y^2}{(X+Y+Z)^2} + b \frac{YZ}{(X+Y+Z)^2} + c \frac{Z^2}{(X+Y+Z)^2} + \alpha \frac{Y}{X+Y+Z} + \beta \frac{Z}{X+Y+Z} + \gamma = 0.$$

En multipliant par $(X+Y+Z)^2$, on obtient :

$$aY^2 + bYZ + cZ^2 + \alpha Y(X+Y+Z) + \beta Z(X+Y+Z) + \gamma(X+Y+Z)^2 = 0.$$

En regroupant, on peut donc mettre cela sous la forme

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 + pYZ + qXZ + rXY = 0.$$

Comme $A, B, C \in \mathcal{C}$, il vient $\lambda = \mu = \nu = 0$ et par suite

$$\mathcal{C} : pYZ + qXZ + rXY = 0.$$

CQFD

Revenons donc au théorème. Soit donc A, B, C, D, E cinq points distincts du plan.

Si ils sont alignés, c'est fini en prenant deux droites $(D_0) \cup (D'_0)$ dont l'une contient les 5 points.

1) Existence.

Supposons donc que les 5 points ne sont pas alignés. Il existe donc 3 points parmi les 5 qui sont non alignés. Supposons sans perte de généralité que (A, B, C) ne sont pas alignés. Ils forment donc un repère affine du plan. Notons $E[x_1, y_1, z_1]$ et $D[x_2, y_2, z_2]$ les coordonnées barycentriques de E et D dans le repère (A, B, C) .

Si $\mathcal{C}$ est une conique qui passe par A, B, C, D, E , si et seulement si $\mathcal{C}$ est de la forme $pYZ + qXZ + rXY = 0$ et vérifie $E \in \mathcal{C}$ et $D \in \mathcal{C}$, alors la conique $\mathcal{C} : pYZ + qXZ + rXY = 0$ passe par A, B, C, D, E si et seulement si

$$(S) : \begin{cases} p y_1 z_1 + q x_1 z_1 + r x_1 y_1 = 0 \\ p y_2 z_2 + q x_2 z_2 + r x_2 y_2 = 0 \end{cases}.$$

(S) est un système linéaire homogène à 2 équations et 3 inconnues (p, q, r) , donc (S) admet des solutions non nulles (le rang du système est ≤ 2). (S) admet donc des solutions.

Donc, il existe une conique passant par A, B, C, D, E .

2) Unicité.

Montrons le point 2), qui se fait par contraposée.

Supposons que 4 points parmi les 5 soient alignés sur une droite (D_0) . Alors n'importe quelle droite (D'_0) contenant le 5-ième point donne la conique $(D_0) \cup (D'_0)$ passant par les 5 points. Donc, il n'y a pas unicité.

Réciproquement, supposons qu'il n'y a pas unicité. Comme (p, q, r) et (p', q', r') non proportionnels définissent la même conique, cela signifie que l'ensemble des solutions de (S) est de dimension ≥ 2 , donc le rang du système, i.e. le rang de

$$M = \begin{pmatrix} y_1 z_1 & x_1 z_1 & x_1 y_1 \\ y_2 z_2 & x_2 z_2 & x_2 y_2 \end{pmatrix},$$

est ≤ 1 . Donc, tous les mineurs de taille 2 de M sont nuls. Donc, par exemple,

$$\begin{vmatrix} y_1 z_1 & x_1 z_1 \\ y_2 z_2 & x_2 z_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{donc} \quad z_1 z_2 \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0,$$

donc

$$z_1 z_2 \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ 1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et ainsi} \quad z_1 z_2 \det(C, D, E) = 0.$$

De même, on obtient

$$\begin{cases} x_1 x_2 \det(A, D, E) = 0 \\ y_1 y_2 \det(B, D, E) = 0 \end{cases}.$$

Montrons que 2 des 3 points A, B, C sont sur la droite (DE) .

Par l'absurde, supposons que A et B ne sont pas sur (DE) . Donc, $x_1 x_2 \det(A, D, E) = 0$ avec $\det(A, D, E) \neq 0$ entraîne $x_1 x_2 = 0$.

Supposons par exemple que $x_1 = 0$. Comme $D \neq C$, $y_1 \neq 0$, et comme $D \neq B$, $z_1 \neq 0$. Donc, $y_1 z_1 \neq 0$. Mais $\det(B, D, E) \neq 0$ donc $y_1 y_2 = 0$, d'où $y_2 = 0$.

Comme $E \neq A$, $z_2 \neq 0$ et comme $E \neq C$, $x_2 \neq 0$. Donc, $x_2 z_2 \neq 0$.

On a alors

$$M = \begin{pmatrix} y_1 z_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 z_2 & 0 \end{pmatrix},$$

donc le rang du système est de 2, ce qui est absurde.

Donc, A ou B appartient à (DE) . On peut supposer que $A \in (DE)$. On montre alors de la même façon que B ou C appartient à (DE) , ce qui donne 4 points alignés.

3) Dégénérescence.

La conique $\mathcal{C}$ est dégénérée si, et seulement si, la forme quadratique associée est dégénérée, c'est-à-dire, si

$$M_q = \begin{pmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{pmatrix}$$

vérifie $\det(M_q) = 0$. On a $\det(M_q) = 2pqr$, donc $\mathcal{C}$ est dégénérée si, et seulement si, $pqr = 0$.

($\Rightarrow$) Si $p = 0$, alors la conique s'écrit

$$X(qZ + rY) = 0$$

et $\mathcal{C} = \{X = 0\} \cup \{qZ + rY = 0\}$, l'union de 2 droites. Donc les 5 points sont contenus dans 2 droites, donc il y en a 3 au moins alignés, et la conique étant unique, c'est exactement 3.

($\Leftarrow$) Si 3 points sont alignés sur une droite (D_0) , alors $(D_0) \cup (D'_0)$, où (D'_0) contient les 2 autres points, est une conique passant par les 5 points (on est dans le cas de l'unicité donc il n'y a pas 4 points alignés). Cette conique est dégénérée. $\square$