exp : $S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

Leçons : 155, 156, 157
Référence : L. Isenmann, T. Pecatte, *L'oral à l'agrégation de mathématiques – Une sélection de développements*, Ellipses.

On note $S_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles de taille n, et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices symétriques définies positives.

Théorème 1. *L'application* exp *réalise un homéomorphisme de* $S_n(\mathbb{R})$ *sur* $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Démonstration. **Étape 1 : exp est bien définie de $S_n(\mathbb{R})$ dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$.**
Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$ diagonale telles que

$$A = PDP^{-1} \quad (\text{avec } P^{-1} = {}^tP).$$

On a alors

$$\exp(A) = P \operatorname{diag}(e^{d_1}, \dots, e^{d_n})\, P^{-1},$$

et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $e^{d_i} > 0$, donc $\exp(A) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Étape 2 : exp est surjective.
Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrons qu'il existe $A \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $B = \exp(A)$. Comme $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$, avec $d_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, telles que

$$B = PDP^{-1}.$$

Posons alors $A = P \operatorname{diag}(\ln(d_1), \dots, \ln(d_n))\, P^{-1}$. On a $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $\exp(A) = B$. Donc exp est surjective.

Étape 3 : exp est injective.
Soit donc $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$ que l'on peut écrire

$$A = PD_AP^{-1} \quad \text{et} \quad A' = QD_{A'}Q^{-1},$$

avec $P, Q \in O_n(\mathbb{R})$, $D_A = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $D_{A'} = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Supposons que $\exp(A) = \exp(A')$; montrons que $A = A'$.
Posons L le polynôme interpolateur de Lagrange tel que $L(e^{d_i}) = d_i$ et $L(e^{\mu_i}) = \mu_i$ pour tout i.

Remarque. L est bien défini, car si $e^{d_i} = e^{\mu_j}$ alors $d_i = \mu_j$, par injectivité de $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On a :

$$L(\exp(A)) = L(\exp(PD_AP^{-1})) = P\, L(\exp(D_A))\, P^{-1} = P \operatorname{diag}(L(e^{d_1}), \dots, L(e^{d_n}))\, P^{-1} = A.$$

Mais on a $\exp(A) = \exp(A')$, donc $L(\exp(A')) = A$, et le même calcul donne aussi $L(\exp(A')) = A'$. D'où $A = A'$.

Étape 4 : exp est bicontinue.
exp est continue sur $S_n(\mathbb{R})$ (restriction d'une série entière de rayon de convergence infini) et bijective de $S_n(\mathbb{R})$ sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$ d'après les étapes précédentes. Il reste donc à montrer que $\exp^{-1} : S_n^{++}(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ est continue. On utilise la norme $\|\cdot\|_2$.

Soit $(B_p = \exp(A_p))_p \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$. Supposons que $B_p \xrightarrow[p\to\infty]{} B = \exp(A)$. Montrons que $A_p \xrightarrow[p\to\infty]{} A$.

La suite $(B_p)_{p\geq 0}$ converge, donc est bornée : il existe $C > 0$ telle que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\|B_p\|_2 \leq C$. Or, on a

$$\|B_p\|_2 = \sqrt{\rho({}^tB_pB_p)} = \sqrt{\rho(B_p^2)} = \rho(B_p),$$

où ρ désigne le rayon spectral (les valeurs propres de B_p étant strictement positives). Donc,

$$\max \mathrm{Sp}(B_p) \leq C \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

D'autre part, par continuité de l'application $X \mapsto X^{-1}$, $GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, on obtient la convergence $B_p^{-1} \xrightarrow[p\to\infty]{} B^{-1}$, donc la suite $(B_p^{-1})_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée également, et ses valeurs propres sont les inverses des valeurs propres des B_p. Donc,

$$\exists C' > 0, \quad \forall \lambda \in \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{Sp}(B_p), \quad \lambda \geq C'.$$

Ainsi,

$$\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{Sp}(B_p) \subset [C', C] \subset]0, +\infty[,$$

et par suite,

$$\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{Sp}(A_p) \subset [\ln(C'), \ln(C)] \subset \mathbb{R}.$$

Ainsi, (A_p) est également bornée pour $\|\cdot\|_2$, donc (A_p) admet une valeur d'adhérence. Il nous reste à montrer qu'il n'y en a qu'une seule.

Soit $\tilde{A}$ une valeur d'adhérence de (A_p). Donc il existe une extraction φ telle que $A_{\varphi(p)} \xrightarrow[p\to\infty]{} \tilde{A}$. Mais,

$$\exp(A_{\varphi(p)}) = B_{\varphi(p)} \xrightarrow[p\to\infty]{} B = \exp(A),$$

et, par continuité de exp, $\exp(A_{\varphi(p)}) \xrightarrow[p\to\infty]{} \exp(\tilde{A})$.

Par unicité de la limite, $\exp(\tilde{A}) = \exp(A)$, donc, par injectivité (étape 3), $\tilde{A} = A$.

Ainsi (A_p) est une suite bornée dont toute valeur d'adhérence vaut A : elle converge donc vers A, ce qui termine la preuve. □