

Générateurs de $O(E)$

Leçons : 106, 108, 158, 161, 191

Référence : *Oraux X-ENS*, tome 7, H. Gianella.

Dans tout ce développement, E désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, muni de son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition 1. Une réflexion de E est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E : c'est l'endomorphisme s de E défini, pour un hyperplan H de E et un vecteur $a \neq 0$ orthogonal à H , par $s|_H = \text{id}_H$ et $s(a) = -a$.

Théorème 2 (Cartan–Dieudonné). Toute isométrie $u \in O(E)$ s'écrit comme le produit d'exactly r réflexions, où $r = \text{rg}(u - \text{id})$.

Démonstration.

Lemme 3. Soit $u \in O(E)$ et $r = \text{rg}(u - \text{id})$. Si u s'écrit comme produit de p réflexions, alors $p \geq r$.

Démonstration du lemme. Supposons $u = s_1 \circ \dots \circ s_p$, où $s_1, \dots, s_p$ sont des réflexions. Pour tout $1 \leq i \leq p$, notons H_i l'hyperplan fixé par s_i : il existe $\varphi_i \in E^*$ tel que $\text{Ker}(\varphi_i) = H_i$.

Si $x \in \bigcap_{i=1}^p H_i$, alors $s_i(x) = x$ pour tout i , donc $u(x) = x$; ainsi

$$\bigcap_{i=1}^p H_i \subset \text{Ker}(u - \text{id}),$$

donc, par la formule du rang,

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^p H_i \right) \leq \dim(\text{Ker}(u - \text{id})) = n - \text{rg}(u - \text{id}).$$

Posons

$$\begin{aligned} \varphi : E &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ x &\mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)) \end{aligned}$$

Alors $\bigcap_{i=1}^p H_i = \text{Ker}(\varphi)$, donc

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^p H_i \right) = \dim(\text{Ker}(\varphi)) = n - \text{rg}(\varphi) \geq n - p,$$

car $\text{rg}(\varphi) \leq p$.

En combinant les deux inégalités,

$$n - \text{rg}(u - \text{id}) \geq n - p,$$

donc $p \geq \text{rg}(u - \text{id}) = r$.

CQFD

Montrons à présent que toute isométrie $u \in O(E)$ se décompose en produit d'au plus $r = \text{rg}(u - \text{id})$ réflexions ; avec le lemme précédent, cela donnera exactement r réflexions, ce qui conclura la démonstration.

On procède par récurrence sur $r = \text{rg}(u - \text{id})$.

Si $r = 0$, alors $u = \text{id}$, qui est bien le produit de 0 réflexion.

Soit $r \geq 1$. Supposons le résultat vrai pour tout $f \in O(E)$ tel que $\text{rg}(f - \text{id}) < r$. Soit $u \in O(E)$ tel que $r = \text{rg}(u - \text{id})$.

Comme $\text{rg}(u - \text{id}) \geq 1$, on a $\dim(\text{Ker}(u - \text{id})) < n$, donc il existe $e \in E$ de norme 1 tel que $u(e) \neq e$. Comme u est une isométrie, $\|u(e)\| = \|e\| = 1$, d'où

$$\langle u(e) - e, u(e) + e \rangle = \|u(e)\|^2 - \|e\|^2 = 0.$$

Posons s la réflexion par rapport à l'hyperplan $\text{Vect}(u(e) - e)^\perp$. Par construction, $s(u(e) + e) = u(e) + e$ et $s(u(e) - e) = e - u(e)$, donc, en sommant,

$$s(u(e)) = e.$$

L'idée est d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $s \circ u$, qui est bien une isométrie. Il faut donc vérifier que $\text{rg}(s \circ u - \text{id}) < \text{rg}(u - \text{id})$, ce qui, par la formule du rang, revient à vérifier que $\text{Ker}(u - \text{id}) \subset \text{Ker}(s \circ u - \text{id})$ et que cette inclusion est stricte.

Soit $x \in \text{Ker}(u - \text{id})$, i.e. $u(x) = x$. On a

$$\langle x, u(e) - e \rangle = \langle x, u(e) \rangle - \langle x, e \rangle = \langle u(x), u(e) \rangle - \langle x, e \rangle = \langle x, e \rangle - \langle x, e \rangle = 0,$$

où l'on a utilisé $u(x) = x$ puis $u \in O(E)$. Ainsi $x \in \text{Vect}(u(e) - e)^\perp$, donc $s(x) = x$, donc $s(u(x)) = s(x) = x$, ce qui montre $\text{Ker}(u - \text{id}) \subset \text{Ker}(s \circ u - \text{id})$.

Cette inclusion est stricte : on a $s(u(e)) = e$, donc $e \in \text{Ker}(s \circ u - \text{id})$, mais $u(e) \neq e$, donc $e \notin \text{Ker}(u - \text{id})$.

Par hypothèse de récurrence, il existe des réflexions $s_1, \dots, s_p$, avec $p \leq r - 1$, telles que $s \circ u = s_1 \circ \dots \circ s_p$. Comme s est une réflexion, $s \circ s = \text{id}$, donc

$$u = s \circ s_1 \circ \dots \circ s_p,$$

produit de $p + 1 \leq r$ réflexions. Avec le lemme, on obtient en fait $p + 1 = r$.

Par le principe de récurrence, on a donc montré que toute isométrie de E s'écrit comme produit d'au plus $\text{rg}(u - \text{id})$ réflexions ; avec le lemme, on obtient le résultat voulu. $\square$