

Théorème de projection sur un convexe fermé

Leçons : 213, 219, 253

Référence : *Mathématiques pour l'agrégation externe : Analyse*, J.-E. Rombaldi, p. 240.

Théorème 1 (Projection sur un convexe fermé). *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Soit C un convexe fermé non vide de E . Alors :*

(1) $\forall x \in E$, il existe un unique vecteur $p_C(x) \in C$ tel que $\|x - p_C(x)\| = d(x, C)$;

(2) ce vecteur est également l'unique vecteur appartenant à C tel que

$$\forall z \in C, \quad \operatorname{Re}(\langle x - p_C(x), z - p_C(x) \rangle) \leq 0;$$

(3) l'application $p_C : E \rightarrow C$ est 1-lipschitzienne, donc uniformément continue.

Démonstration. ① Soit $x \in E$. Notons $\delta = d(x, C) = \inf_{y \in C} \|y - x\|$.

Alors, il existe $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset C$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\delta^2 \leq \|x - y_n\|^2 \leq \delta^2 + \frac{1}{n}$.

Montrons que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy. Pour $m > n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\|^2 &= \|(y_m - x) + (x - y_n)\|^2 \\ &= 2 \left(\|y_m - x\|^2 + \|x - y_n\|^2 - 2 \left\| x - \frac{y_m + y_n}{2} \right\|^2 \right) \\ &\quad (\text{identité du parallélogramme}). \end{aligned}$$

Or, $\frac{y_m + y_n}{2} \in C$ car C est convexe, donc $\left\| x - \frac{y_m + y_n}{2} \right\|^2 \geq \delta^2$, d'où

$$\|y_m - y_n\|^2 \leq 2 \left(\delta^2 + \frac{1}{n} + \delta^2 + \frac{1}{m} - 2\delta^2 \right) \leq 2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) < \frac{4}{n}.$$

Donc, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans E qui est complet, donc (y_n) converge vers $y \in E$. Comme C est fermé, $y \in C$.

Il reste à montrer que y est unique. Soit z réalisant également la distance de x à C . On a alors

$$\begin{aligned} \|y - z\|^2 &= \|(y - x) + (x - z)\|^2 = 2 \left(\underbrace{\|y - x\|^2}_{=\delta^2} + \underbrace{\|x - z\|^2}_{=\delta^2} - 2 \underbrace{\left\| x - \frac{y + z}{2} \right\|^2}_{\geq \delta^2} \right) \\ &\leq 2(\delta^2 + \delta^2 - 2\delta^2) = 0, \end{aligned}$$

donc $y = z$. Le point (1) est prouvé.

② Soit y l'unique vecteur de C tel que $d(x, C) = \|x - y\|$. Soit $z \in C$. Montrons que $\operatorname{Re}(\langle x - y, z - y \rangle) \leq 0$.

Posons, $\forall t \in [0, 1]$, $z_t = (1 - t)y + tz = y + t(z - y)$. $\forall t \in [0, 1]$, $z_t \in C$ par convexité. On a

$$\|x - y\|^2 \leq \|x - z_t\|^2 = \|x - y - t(z - y)\|^2,$$

donc $\|x - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - 2t \operatorname{Re}(\langle x - y, z - y \rangle) + t^2 \|z - y\|^2$, donc, $\forall t \in [0, 1]$,

$$t \|z - y\|^2 - 2 \operatorname{Re}(\langle x - y, z - y \rangle) \geq 0.$$

En faisant tendre t vers 0, cela impose $\operatorname{Re}(\langle x - y, z - y \rangle) \leq 0$.

Réciproquement, soit $y' \in C$ tel que $\forall z \in C$, $\operatorname{Re}(\langle x - y', z - y' \rangle) \leq 0$. Alors, pour tout $z \in C$,

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 &= \|(x - y') + (y' - z)\|^2 = \|x - y'\|^2 - 2 \operatorname{Re}(\langle x - y', z - y' \rangle) + \|y' - z\|^2 \\ &\geq \|x - y'\|^2, \end{aligned}$$

donc il vient $d(x, C) \geq \|x - y'\|$, et par minimalité, $d(x, C) = \|x - y'\|$, donc $y = y'$.

③ Soit $x_1, x_2 \in E$. Notons $y_1 = p_C(x_1)$ et $y_2 = p_C(x_2)$. D'après le point (2), on peut écrire

$$\operatorname{Re}(\langle x_1 - y_1, y_2 - y_1 \rangle) \leq 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(\langle x_2 - y_2, y_1 - y_2 \rangle) \leq 0,$$

donc, en sommant, il vient

$$\operatorname{Re}(\langle (x_1 - x_2) + (y_2 - y_1), y_2 - y_1 \rangle) \leq 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \|y_2 - y_1\|^2 &= \operatorname{Re}(\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1 \rangle) \\ &= \underbrace{\operatorname{Re}(\langle (x_1 - x_2) + (y_2 - y_1), y_2 - y_1 \rangle)}_{\leq 0} + \operatorname{Re}(\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle) \\ &\leq |\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle| \underset{\text{C.-S.}}{\leq} \|x_2 - x_1\| \|y_2 - y_1\|, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □