

Méthodes de calcul de l'intégrale de Dirichlet

Leçons : 235, 236, 239

Références :

1. J. Bernis, *Analyse pour l'agrégation de mathématiques*, p. 261 (pour la méthode 1).
2. H. Gianella, *Oraux X-ENS*, Analyse 3, p. 217 (pour la méthode 2).

Théorème 1 (Intégrale de Dirichlet). On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

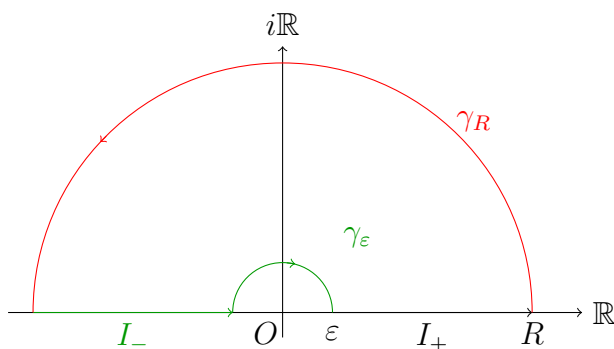
Méthode 1 : Analyse complexe. Pour $0 < \varepsilon < R$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin(t)}{t} dt &= \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{it} - e^{-it}}{2it} dt = \frac{1}{2i} \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{it}}{t} dt - \frac{1}{2i} \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-it}}{t} dt \\ &\stackrel{u=-t \text{ dans la 2e}}{=} \frac{1}{2i} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{it}}{t} dt + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{it}}{t} dt \right). \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{e^{iz}}{z}. \end{aligned}$$

f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. L'idée est de considérer un chemin γ pour utiliser la formule intégrale de Cauchy.



$$\gamma = \gamma_R \cup I_- \cup \gamma_\varepsilon \cup I_+.$$

Par la formule intégrale de Cauchy, on a, pour $0 < \varepsilon < R$,

$$0 = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{I_-} f(z) dz + \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz + \int_{I_+} f(z) dz.$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_{I_-} f(z) dz + \int_{I_+} f(z) dz &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{it}}{t} dt + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{it}}{t} dt \\ &= 2i \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin(t)}{t} dt \quad (\text{d'après ci-avant}), \end{aligned}$$

donc

$$\int_{\varepsilon}^R \frac{\sin(t)}{t} dt \underset{(*)}{=} -\frac{1}{2i} \left(\int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{\gamma_{\varepsilon}} f(z) dz \right).$$

Reste donc à calculer ces deux intégrales.

Calcul de $\int_{\gamma_R} f(z) dz$: On paramètre $\gamma_R : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto Re^{it}$. On a donc, par définition de l'intégrale sur un chemin,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^{\pi} f(\gamma_R(t)) \gamma'_R(t) dt \right| = \left| i \int_0^{\pi} \frac{\exp(iRe^{it})}{Re^{it}} Re^{it} dt \right| \\ &\leq \int_0^{\pi} |\exp(iRe^{it})| dt = \int_0^{\pi} \exp(-R \sin(t)) dt = \int_0^{\pi} e^{-R \sin(t)} dt. \end{aligned}$$

On applique le théorème de convergence dominée. Soit $(R_n) \subset \mathbb{R}_+$ telle que $R_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, et notons $g_n(t) = e^{-R_n \sin(t)}$.

$$\textcircled{1} \quad \forall t \in]0, \pi[, g_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 ;$$

$$\textcircled{2} \quad \forall t \in]0, \pi[, \forall n \in \mathbb{N}, |g_n(t)| \leq 1, \text{ qui est intégrable sur } [0, \pi] \text{ et indépendant de } n.$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée, $\int_0^{\pi} g_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Ceci étant vrai pour toute suite $(R_n) \subset \mathbb{R}_+$ telle que $R_n \rightarrow \infty$, on a donc

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz \xrightarrow[R \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Calcul de $\int_{\gamma_{\varepsilon}} f(z) dz$: On paramètre cette fois $\gamma_{\varepsilon} : t \in [-\pi, 0] \mapsto \varepsilon e^{-it}$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{\varepsilon}} f(z) dz &= \int_{-\pi}^0 f(\gamma_{\varepsilon}(t)) \gamma'_{\varepsilon}(t) dt = \int_{-\pi}^0 \frac{\exp(i\varepsilon e^{-it})}{\varepsilon e^{-it}} (-i)\varepsilon e^{-it} dt \\ &= -i \int_{-\pi}^0 \exp(i\varepsilon e^{-it}) dt = -i \int_0^{\pi} \exp(i\varepsilon e^{it}) dt \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} -i\pi \end{aligned}$$

(par le théorème de convergence dominée, encore une fois).

Donc, en faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$ dans $(*)$, il vient

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

□

Méthode 2 : Transformée de Laplace. Posons

$$\begin{aligned} f : [0, +\infty[\times]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}, \end{aligned}$$

et notons

$$\begin{aligned} F : [0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_0^{+\infty} f(x, t) dt. \end{aligned}$$

Étape 1 (F est bien définie sur $\mathbb{R}_+$) : Soit $x > 0$: $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}$ est prolongeable par continuité en 0 avec la valeur $f(x, 0) = 1$; on note encore $f(x, \cdot)$ ce prolongement. Ainsi, $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc y est localement intégrable, et $f(x, t) \underset{t \rightarrow \infty}{=} O(1/t^2)$. Donc, F est bien définie sur $]0, +\infty[$.

Montrons maintenant que F est bien définie en 0. On a, pour $X \geq 1$,

$$\int_0^X \frac{\sin(t)}{t} dt = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt}_{\text{bien définie}} + \int_1^X \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

En intégrant par parties le deuxième terme, il vient

$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{\sin(t)}{t} dt &= \left[-\frac{\cos(t)}{t} \right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos(t)}{t^2} dt \\ &= \cos(1) - \underbrace{\frac{\cos(X)}{X}}_{X \rightarrow \infty \rightarrow 0} - \int_1^X \underbrace{\frac{\cos(t)}{t^2}}_{= O(1/t^2)} dt, \end{aligned}$$

donc $\int_1^X \frac{\sin(t)}{t} dt$ admet une limite finie quand $X \rightarrow \infty$. Donc F est bien définie en 0.

Étape 2 (F est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$) :

- ① $\forall t \in]0, +\infty[, x \mapsto \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\sin(t) e^{-xt}$;
- ② soit $\alpha > 0$. $\forall t \in]0, +\infty[, \forall x \geq \alpha, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-\alpha t}$, qui est intégrable sur $]0, +\infty[$ et indépendant de x .

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, F est $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle de la forme $]\alpha, +\infty[$, donc F est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Étape 3 (Calcul de F sur $]0, +\infty[$) : D'après l'étape précédente, pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} F'(x) &= - \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt} dt = -\text{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(x-i)t} dt \right) \\ &= -\text{Im} \left(\left[\frac{e^{-(x-i)t}}{-i-x} \right]_0^{+\infty} \right) = \text{Im} \left(\frac{1}{i-x} \right) = -\frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\exists C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0$, $F(x) = C - \arctan(x)$. Et, comme

$$|F(x)| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \underbrace{\left| \frac{\sin(t)}{t} \right|}_{\leq 1} e^{-xt} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0,$$

$C - \arctan(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$, d'où $C = \frac{\pi}{2}$. Donc, $\forall x > 0$, $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

Étape 4 (F est continue sur $\mathbb{R}_+$) : Notons, pour $x \geq 0$, $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ où

$$F_1(x) = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt.$$

F_1 est continue sur $\mathbb{R}_+$ car $\forall t \in]0, 1]$, $x \mapsto \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, et on a la domination $\left| \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \right| \leq 1$, qui est intégrable sur $]0, 1]$.

Montrons que F_2 est continue sur $\mathbb{R}_+$. On a, pour $x \geq 0$, $F_2(x) = \text{Im} \left(\int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t} dt \right)$.

Notons $G(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t} dt$.

Pour $X \geq 1$, on a

$$\int_1^X \frac{e^{-(x-i)t}}{t} dt = \left[\frac{1}{i-x} \frac{e^{-(x-i)t}}{t} \right]_1^X + \frac{1}{i-x} \int_1^X \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2} dt.$$

Donc, en faisant tendre $X \rightarrow \infty$ (car l'intégrande de droite est intégrable et le crochet converge), on obtient

$$G(x) = \frac{e^{i-x}}{x-i} + \frac{1}{i-x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2} dt.$$

Le théorème de continuité sous le signe intégral donne alors la continuité de G , et par suite F_2 est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Donc, F est continue sur $\mathbb{R}_+$, et alors

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

□