

Théorème de Banach-Alaoglu

Leçons : 208, 213

Références :

1. *Oraux X-ENS*, Analyse 3, p. 161.
2. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques*.

Théorème 1 (Banach-Alaoglu). *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et $x \in E$ tels que $\forall y \in E$,*

$$\langle x_{\varphi(n)}, y \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle x, y \rangle.$$

Démonstration. **Cas 1** : E est séparable.

Soit donc $\Gamma = \{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ dénombrable et dense.

Étape 1 (Construction de l'extraction) : Construisons par récurrence une suite $(\mathbb{N} \xrightarrow{\varphi_p} \mathbb{N})_{p \in \mathbb{N}}$ d'applications strictement croissantes et une suite $(\ell_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \langle x_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p(n)}, e_p \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell_p.$$

Par hypothèse, $\exists M \geq 0 / \forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq M$.

$p = 0$: D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|\langle x_n, e_0 \rangle| \leq \|x_n\| \|e_0\| \leq M \|e_0\|.$$

Donc, la suite réelle $(\langle x_n, e_0 \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc $\exists \varphi_0 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et $\ell_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle x_{\varphi_0(n)}, e_0 \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_0.$$

Supposons avoir $\varphi_0, \dots, \varphi_p$ et $\ell_0, \dots, \ell_p$. La suite $(\langle x_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p(n)}, e_{p+1} \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc $\exists \varphi_{p+1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et ℓ_{p+1} tels que

$$\langle x_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_{p+1}(n)}, e_{p+1} \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_{p+1}.$$

Posons alors $\varphi(n) = \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_n(n)$.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $(x_{\varphi(n)})$ est une extraction de $(x_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p(n)})$ à partir du rang p , donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \langle x_{\varphi(n)}, e_p \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_p.$$

$\varphi_n(n) \geq n$, $\forall n$ (car φ_n est strictement croissante), et $\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_{n-1}$ est strictement croissante, donc

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_{n-1}(\varphi_n(n)) \geq \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_{n-1}(n) \\ &> \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_{n-1}(n-1) = \varphi(n-1), \end{aligned}$$

donc φ est bien strictement croissante.

Montrons que $\forall y \in E$, $(\langle x_{\varphi(n)}, y \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Soit $y \in E$. Soit $\varepsilon > 0$. Par densité de Γ , il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ / $\|y - e_{N_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{4M}$.

D'après ci-avant, la suite $(\langle x_{\varphi(n)}, e_{N_0} \rangle)_n$ converge, donc est de Cauchy, i.e. $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ / $\forall p \geq q \geq N_1$,

$$|\langle x_{\varphi(p)} - x_{\varphi(q)}, e_{N_0} \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour montrer que $(\langle x_{\varphi(n)}, y \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy. On a, $\forall p \geq q \geq N_1$,

$$\begin{aligned} |\langle x_{\varphi(p)} - x_{\varphi(q)}, y \rangle| &= |\langle x_{\varphi(p)} - x_{\varphi(q)}, e_{N_0} + y - e_{N_0} \rangle| \\ &\leq \underbrace{|\langle x_{\varphi(p)} - x_{\varphi(q)}, e_{N_0} \rangle|}_{\leq \varepsilon/2} + |\langle x_{\varphi(p)} - x_{\varphi(q)}, y - e_{N_0} \rangle| \\ &\leq \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{\text{C.S.}} + \underbrace{\|x_{\varphi(p)} - x_{\varphi(q)}\|}_{\leq 2M} \underbrace{\|y - e_{N_0}\|}_{\leq \varepsilon/4M} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

donc $(\langle x_{\varphi(n)}, y \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Il reste à montrer qu'il existe $x \in E$ / $\forall y \in E$, $\langle x_{\varphi(n)}, y \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle x, y \rangle$.

Considérons

$$\begin{aligned} T : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ y &\longmapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_{\varphi(n)}, y \rangle. \end{aligned}$$

T est clairement linéaire. Il reste à voir que T est continue. $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $|\langle x_n, y \rangle| \leq \|x_n\| \|y\| \leq M \|y\|$, d'où, par passage à la limite, $|T(y)| \leq M \|y\|$.

Donc T est linéaire continue, donc, d'après le théorème de représentation de Riesz, $\exists x \in E$ / $\forall y$, $T(y) = \langle x, y \rangle$. Ce qui achève la preuve.

Remarque. C'est ici, donc, qu'on a besoin que E soit un Hilbert.

Cas 2 : E non séparable.

Considérons $F = \overline{\text{Vect}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$. F est un sous-espace vectoriel fermé de E (et il est séparable, comme adhérence du sous-espace engendré par une famille dénombrable). D'après le théorème de projection orthogonale, on a $E = F \oplus F^\perp$. Soit $y = y_F + y_{F^\perp} \in E$.

D'après le cas séparable, appliqué à $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$, il existe φ strictement croissante et $x \in F$ tels que $\langle x_{\varphi(n)}, y_F \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle x, y_F \rangle$. $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$\langle x_{\varphi(n)}, y \rangle = \langle x_{\varphi(n)}, y_F \rangle + \underbrace{\langle x_{\varphi(n)}, y_{F^\perp} \rangle}_{=0},$$

donc $\langle x_{\varphi(n)}, y \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle x, y \rangle$. □