

Théorème de Fourier-Plancherel

Leçons : 201, 208, 209, 234, 250

Référence : 131 développements pour l'oral de l'agrégation, P. Le Barbenchon, D. Lesesvre, P. Montagnon, T. Pierron.

Théorème 1 (Plancherel). *Il existe une unique application linéaire continue $\bar{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ qui coïncide avec la transformée de Fourier sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. $\bar{\mathcal{F}}$ est de plus une isométrie bijective.*

Démonstration. On décompose le développement en 3 grandes étapes :

Étape 1 : $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \forall y \in \mathbb{R}, \widehat{\widehat{f}}(y) = f(-y)$ (revient à retrouver la formule d'inversion de Fourier).

Étape 2 : $\mathcal{F}$ est une isométrie de $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \subset L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

Étape 3 : $\mathcal{F}$ se prolonge de manière unique en un opérateur $\bar{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ isométrique bijectif.

Étape 1 : Montrons que $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et tout $y \in \mathbb{R}, \widehat{\widehat{f}}(y) = f(-y)$. On commence par le montrer pour $y = 0$.

Pour $\varepsilon > 0$, posons $K_\varepsilon : x \mapsto \frac{1}{\varepsilon} K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, où $K = \frac{1}{\sqrt{\pi}} G_1$, avec $G_a : x \mapsto e^{-ax^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ pour $a > 0$. On a $\int_{\mathbb{R}} K_\varepsilon = 1$.

Lemme 2. $\forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} g(x) K_\varepsilon(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} g(0)$.

Démonstration du lemme. On a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} g(x) K_\varepsilon(x) dx - g(0) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (g(x) - g(0)) K_\varepsilon(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |g(x) - g(0)| K_\varepsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}} |g(x) - g(0)| \frac{1}{\varepsilon} K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \\ &= \int_{u=x/\varepsilon} |g(\varepsilon u) - g(0)| K(u) du. \end{aligned}$$

Or, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc il existe $M > 0$ tel que $|g'| \leq M$. Par l'inégalité des accroissements finis, on a alors $\forall u \in \mathbb{R}, |g(\varepsilon u) - g(0)| \leq M|u|\varepsilon$, d'où

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g(x) K_\varepsilon(x) dx - g(0) \right| \leq \frac{M\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |u| e^{-u^2} du}_{=1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

CQFD

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par $\mathcal{F}$, donc $\widehat{\widehat{f}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et ainsi, par le lemme précédent appliqué à $g = \widehat{\widehat{f}}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{\widehat{f}}(x) K_\varepsilon(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \widehat{\widehat{f}}(0).$$

Rappelons que $K_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon^2}} G_{1/\varepsilon^2}$. On a alors, en appliquant le lemme des chapeaux ($\int \hat{u} v = \int u \hat{v}$, appliqué de proche en proche pour faire passer les deux chapeaux de f à G_{1/ε^2}),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\widehat{f}}(x) K_\varepsilon(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon^2}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\widehat{f}}(x) G_{1/\varepsilon^2}(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon^2}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \widehat{\widehat{G_{1/\varepsilon^2}}}(x) dx \quad (\text{lemme des chapeaux}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon^2}} \int_{\mathbb{R}} f(x) G_{1/\varepsilon^2}(x) dx \quad \left(\text{car } \widehat{\widehat{G_{1/\varepsilon^2}}} = G_{1/\varepsilon^2}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) K_\varepsilon(x) dx. \end{aligned}$$

(On a utilisé que G_{1/ε^2} est paire, donc, d'après l'étape 1 appliquée à $h = G_{1/\varepsilon^2}$, $\widehat{\widehat{h}}(y) = h(-y) = h(y)$, d'où $\widehat{\widehat{G_{1/\varepsilon^2}}} = G_{1/\varepsilon^2}$.)

En faisant tendre ε vers 0 dans cette égalité : le membre de gauche tend vers $\widehat{\widehat{f}}(0)$ (par le lemme, appliqué ci-dessus à $g = \widehat{\widehat{f}}$) et le membre de droite tend vers $f(0)$ (par le lemme, appliqué à $g = f$) ; il vient bien $\widehat{\widehat{f}}(0) = f(0)$.

On va obtenir le cas général par translation. Considérons $y \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Posons $\tau_y f : x \mapsto f(x + y)$. On a alors, d'après ci-avant appliqué à $\tau_y f$,

$$\begin{aligned} f(y) &= \tau_y f(0) = \widehat{\widehat{\tau_y f}}(0) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\tau_y f}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \tau_y f(x) e^{-2i\pi x \xi} dx \right) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x + y) e^{-2i\pi x \xi} dx \right) d\xi. \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $u = x + y$, il vient

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-2i\pi(u-y)\xi} du \right) d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi y \xi} \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-2i\pi u \xi} du d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi y \xi} d\xi. \end{aligned}$$

Donc, $f(y) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{-2i\pi \xi(-y)} d\xi = \widehat{\widehat{f}}(-y)$, d'où

$$\widehat{\widehat{f}}(y) = f(-y).$$

Étape 2 : Montrons que $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
 \|f\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{f(x)} dx = \overline{\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{f(x)} dx} \quad (\text{quantité réelle}) \\
 &= \overline{\int_{\mathbb{R}} \widehat{\widehat{f}}(-x) \overline{f(x)} dx} \quad (\text{étape 1 : } f(x) = \widehat{\widehat{f}}(-x)) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\widehat{f}}(-x) f(x) dx \quad (\text{la barre passe à l'intérieur}) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\widehat{f}}(x) f(x) dx \quad \left(\text{car } \overline{\widehat{h}(-\xi)} = \widehat{\widehat{h}}(\xi) \text{ avec } h = \widehat{f} \right) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\widehat{f}}(x) \widehat{f}(x) dx \quad (\text{lemme des chapeaux}) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{f}(x)} \widehat{f}(x) dx = \|\widehat{f}\|_2^2,
 \end{aligned}$$

d'où $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$.

Étape 3 : $\mathcal{F}$ se prolonge de manière unique à $L^2(\mathbb{R})$ en un opérateur isométrique bijectif.

D'après le résultat précédent, $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ est un opérateur défini sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, qui est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. Donc, par le théorème de prolongement des opérateurs, $\mathcal{F}$ se prolonge de manière unique en un opérateur $\bar{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$. Il reste à montrer que $\bar{\mathcal{F}}$ est une isométrie bijective.

Caractère isométrique : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Par densité, il existe $(f_n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} f$. Donc $\|f_n\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \|f\|_2$.

Par continuité de $\bar{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, on a $\widehat{f}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \bar{\mathcal{F}}(f)$, donc $\|\widehat{f}_n\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \|\bar{\mathcal{F}}(f)\|_2$. Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|\widehat{f}_n\|_2 = \|f_n\|_2$ (étape 2, car $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$), donc $\|\bar{\mathcal{F}}(f)\|_2 = \|f\|_2$.

De là, $\bar{\mathcal{F}}$ est automatiquement injective. Il reste à montrer que $\bar{\mathcal{F}}$ est surjective. Mais, d'une part, $\bar{\mathcal{F}}(L^2)$ est dense car contient $\bar{\mathcal{F}}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, qui est dense dans L^2 ; et d'autre part, $\bar{\mathcal{F}}(L^2)$ est fermé comme image d'un fermé par une isométrie. Donc $\bar{\mathcal{F}}(L^2) = L^2(\mathbb{R})$, donc $\bar{\mathcal{F}}$ est bijective. $\square$