

Développement asymptotique de la série harmonique

Leçons : 223, 224, 230

Référence : *Oraux X-ENS*, tome 3, H. Gianella, p. 224.

Notation : On note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $R_n(\alpha) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, $\forall \alpha > 1$.

Théorème 1.

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Démonstration. Étape 1 (Lemme équivalent du reste de Riemann) :

Lemme 2. $\forall \alpha > 1$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

Démonstration du lemme. Soit $\alpha > 1$. $t \mapsto 1/t^\alpha$ est décroissante et intégrable sur $[1, +\infty[$, donc, pour $k \geq 2$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}.$$

En sommant entre $n+1$ et N , on obtient

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha},$$

et, en faisant tendre N vers $+\infty$, il vient

$$\underbrace{\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}}_{\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}} \leq R_n(\alpha) \leq \underbrace{\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}}_{\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}},$$

donc, on a bien $R_n(\alpha) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

CQFD

Étape 2 (DAS en $o(1)$) : Posons $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$. On a :

① $u_n - v_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$

② $u_n - u_{n+1} = -\frac{1}{n+1} - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geq 0$ (par concavité du log), donc (u_n) est décroissante.

③ $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0$, donc (v_n) est croissante.

Donc les suites (v_n) et (u_n) sont adjacentes, donc elles convergent et ont même limite ; notons cette limite γ . Par croissance de (v_n) , on a $\gamma \geq v_2 = 1 - \ln(2) > 0$, donc il vient $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Étape 3 (DAS en $o(1/n)$) : L'idée est d'utiliser le théorème de sommation des équivalents. On pose $t_n = H_n - \ln(n) - \gamma$. (t_n) converge donc, par le lien suite-série, $\sum(t_n - t_{n-1})$ converge, et on a

$$\begin{aligned} t_n - t_{n-1} &= H_n - \ln(n) - \gamma - H_{n-1} + \gamma + \ln(n-1) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}. \end{aligned}$$

Donc, par le théorème de sommation des équivalents dans le cas convergent, on a

$$\underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} (t_k - t_{k-1})}_{= -t_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2},$$

donc

$$t_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \text{ d'après le lemme } \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n},$$

d'où finalement, $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Étape 4 (DAS en $o(1/n^2)$) : On opère de la même manière. Posons $w_n = H_n - \ln(n) - \gamma - \frac{1}{2n}$. (w_n) converge donc, par le lien suite-série, $\sum(w_n - w_{n-1})$ converge, et on a

$$\begin{aligned} w_n - w_{n-1} &= \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} \\ &= -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Donc, encore par sommation des équivalents et le lemme,

$$\sum w_n = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

D'où, $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. □

Corollaire 3. Posons $k_n = \min\{h \in \mathbb{N} \mid H_h > n\}$. Alors, $k_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\gamma} e^n$.

Démonstration. On a, d'après le DAS en $o(1)$, que $H_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Par définition de k_n , on a

$$\ln(k_n) + \gamma + \varepsilon_{k_n} \geq n \quad \text{et} \quad \ln(k_n - 1) + \gamma + \varepsilon_{k_n-1} < n,$$

d'où

$$e^n e^{-\gamma} e^{-\varepsilon_{k_n}} \leq k_n < 1 + e^n e^{-\gamma} e^{-\varepsilon_{k_n-1}},$$

d'où $k_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\gamma} e^n$. □