

Nombres de Bell et partitions de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$

Leçons : 190, 230, 241, 243

Références :

1. *Oraux X-ENS*, tome 6, H. Gianella, p. 338.
2. Bernis, Bernis, *Analyse pour l'agrégation de mathématiques*, p. 285.

Théorème 1 (Nombres de Bell et formule de Dobiński). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $B_0 = 1$ et B_n le nombre de partitions (qui est égal au nombre de relations d'équivalence) de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$. Alors,*

$$\textcircled{1} \quad B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k ;$$

$$\textcircled{2} \quad \text{le rayon de convergence de la série entière } \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} t^n \text{ est } > 0 \text{ et, en notant } S \text{ sa somme,}$$

$$\forall t \text{ dans l'intervalle de convergence, } S'(t) = e^t S(t), \text{ d'où } S(t) = \frac{1}{e} e^{e^t} ;$$

$$\textcircled{3} \quad \forall p \geq 0, \quad B_p = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{n!}.$$

Démonstration. Étape 1 (Dénombrement des partitions de $\llbracket 1, n \rrbracket$) :

Exemples : $B_0 = 1$ par convention.

$$B_1 = 1 : \quad \{\{1\}\}.$$

$$B_2 = 2 : \quad \{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1, 2\}\}.$$

$$B_3 = 5 : \quad \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{2\}, \{1, 3\}\}, \{\{1, 2, 3\}\}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathcal{P}_{n+1}$ l'ensemble des partitions de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$. On cherche donc $B_{n+1} = \#\mathcal{P}_{n+1}$.

Posons, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\mathcal{P}_{n+1,k} = \{P \in \mathcal{P}_{n+1} \mid \text{l'élément de } P \text{ qui contient } n+1 \text{ contient aussi } k \text{ autres éléments}\}.$$

$$\text{On a alors } \mathcal{P}_{n+1} = \bigsqcup_{k=0}^n \mathcal{P}_{n+1,k}, \text{ donc } B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \#\mathcal{P}_{n+1,k}.$$

Fixons $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Une partition $P \in \mathcal{P}_{n+1,k}$ est une partition de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ de la forme $\{A\}$ et une partition du complémentaire de A (noté $\complement A$), qui contient $n-k$ éléments. Il y a $\binom{n}{k}$ choix pour A et B_{n-k} choix pour la partition de $\complement A$, d'où

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k.$$

Étape 2 (Introduction d'une série entière et expression de sa somme) :

Considérons la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} t^n$. Montrons d'abord que son rayon de convergence R est > 0 . Montrons pour cela que $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \leq n!$.

Preuve (par récurrence) : $n = 0$ est clair. Soit $n \geq 0$. Supposons que $\forall k \leq n, B_k \leq k!$. On a alors

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \underbrace{B_k}_{\leq k! \text{ par H.R.}} \leq \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} \leq (n+1)!.$$

Donc, par le principe de récurrence, on a bien montré que $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \leq n!$ (voir l'annexe 1 pour une seconde preuve, par argument combinatoire).

Donc le rayon de convergence de la série entière est $\geq 1 > 0$. Notons alors $S :]-R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ sa somme. On a alors, $\forall t \in]-R, R[$,

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} t^n = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} t^{n+1}.$$

La fonction S est dérivable sur $] -R, R[$ et on a, $\forall t \in]-R, R[$,

$$S'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} t^n.$$

Donc on a

$$\begin{aligned} S'(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{B_k}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \right] t^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \right) = S(t) e^t. \end{aligned}$$

Ainsi $S'(t) = e^t S(t)$. De plus, on a $S(0) = 1$. Ainsi, S est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^t y, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

et par suite, $S(t) = \frac{1}{e} e^{e^t}, \forall t \in]-R, R[$.

Étape 3 (Formule de Dobiński) : On peut développer S en série entière :

$$S(t) = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{nt}}{n!} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{n^p t^p}{n! p!} = \frac{1}{e} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{n!} \right) \frac{t^p}{p!}.$$

Par Fubini, qui ne pose aucun problème, et par unicité du développement en série entière, on a bien

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad B_p = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{n!}.$$

□

Annexes

1. **Seconde preuve de $B_n \leq n!$ (par argument combinatoire)** : Montrons par un argument combinatoire que $B_n \leq n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pour cela, on va montrer que $\mathcal{P}_n$ s'injecte dans $\mathfrak{S}_n$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, notons, pour une partie $A = \{a_1, \dots, a_d\}$ (avec $a_i < a_j$, $\forall i < j$) de $\llbracket 1, k \rrbracket$, C_A le cycle $(a_1 \cdots a_d)$. Posons alors

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{P}_n &\longrightarrow \mathfrak{S}_n \\ P = \{A_1, \dots, A_p\} &\longmapsto C_{A_1} \cdots C_{A_p}. \end{aligned}$$

φ est alors injective par unicité de la décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Donc $B_n \leq n!$.

2. **Interprétation probabiliste** : On peut interpréter B_n de manière probabiliste. En effet, soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. Alors,

$$B_k = \mathbb{E}(X^k), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$