

Fonctions strictement monotones

Leçons : 204, 206, 214, 215

Référence : *Analyse*, X. Gourdon, p. 350.

Définition 1. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. On dit que f est strictement monotone si il existe $k > 0$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq k \|x - y\|^2.$$

Théorème 2. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone. Alors f réalise un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$.

Démonstration.

Lemme 3 (Caractérisation des applications strictement monotones). Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, f est strictement monotone si, et seulement si, $\forall x, h \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle Df(x)(h), h \rangle \geq k \|h\|^2.$$

Démonstration du lemme. ($\Rightarrow$) Supposons f strictement monotone. Soit $(x, h) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Pour $t > 0$, on a alors

$$\langle f(x + th) - f(x), th \rangle \geq k \|th\|^2.$$

Mais f est $\mathcal{C}^1$, donc on a

$$f(x + th) - f(x) = Df(x)(th) + \varepsilon(th)\|th\| \quad \text{avec } \varepsilon(th) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0,$$

donc

$$\langle Df(x)(th) + \varepsilon(th)\|th\|, th \rangle \geq t^2 k \|h\|^2,$$

donc

$$\langle Df(x)(h) + \varepsilon(th)\|h\|, h \rangle \geq k \|h\|^2.$$

En faisant tendre t vers 0, il vient $\langle Df(x)(h), h \rangle \geq k \|h\|^2$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\forall x, h \in \mathbb{R}^d$, $\langle Df(x)(h), h \rangle \geq k \|h\|^2$. Soit $x, h \in \mathbb{R}^d$. Posons

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \langle f(x + th), h \rangle. \end{aligned}$$

φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, par dérivée de la composée, on a, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(t) = \langle Df(x + th)(h), h \rangle \underset{\text{par hypothèse}}{\geq} k \|h\|^2,$$

donc $\varphi(1) - \varphi(0) \geq k \|h\|^2$. Or, $\varphi(1) - \varphi(0) = \langle f(x + h) - f(x), h \rangle$, d'où le résultat. *CQFD*

Soit donc $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ strictement monotone et de classe $\mathcal{C}^1$. Montrons que f est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$ sur lui-même.

① Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^d$, on a $\langle Df(x)(h), h \rangle \geq k \|h\|^2$. En particulier, $Df(x)$ est inversible.

② Soit $x, y \in \mathbb{R}^d$. Supposons $f(x) = f(y)$. Alors, par stricte monotonie, on a $0 \geq k\|x - y\|^2$, donc $x = y$, donc f est injective.

Ainsi, d'après le théorème d'inversion globale, f est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$ sur $f(\mathbb{R}^d)$. Il reste à montrer que $f(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d$. Pour cela, nous allons montrer que $f(\mathbb{R}^d)$ est un ouvert et un fermé de l'espace connexe $\mathbb{R}^d$.

$f(\mathbb{R}^d)$ est ouvert : Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Un théorème d'inversion locale assure l'existence d'un voisinage ouvert $V_x \subset \mathbb{R}^d$ de x et d'un voisinage ouvert W_x de $f(x)$ tel que $f : V_x \rightarrow W_x$ soit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. On a alors

$$f(\mathbb{R}^d) = f\left(\bigcup_{x \in \mathbb{R}^d} V_x\right) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^d} f(V_x) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^d} W_x,$$

donc $f(\mathbb{R}^d)$ est un ouvert.

$f(\mathbb{R}^d)$ est fermé : Soit $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset f(\mathbb{R}^d)$ une suite convergente vers $\ell \in \mathbb{R}^d$. Montrons que $\ell \in f(\mathbb{R}^d)$.

Soit $\varepsilon > 0$. $(f(x_n))$ converge donc est de Cauchy, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq N$, $\|f(x_p) - f(x_q)\| \leq k\varepsilon$. Pour $p, q \geq N$, on a alors

$$\begin{aligned} \|x_p - x_q\|^2 &\leq \frac{1}{k} \langle f(x_p) - f(x_q), x_p - x_q \rangle \\ &\leq \frac{1}{k} \|f(x_p) - f(x_q)\| \|x_p - x_q\| \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq \varepsilon \|x_p - x_q\|, \end{aligned}$$

donc, $\forall p, q \geq N$, $\|x_p - x_q\| \leq \varepsilon$. Ainsi, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}^d$, qui est complet, donc $x_n \rightarrow x_* \in \mathbb{R}^d$, et par continuité de f , $f(x_n) \rightarrow f(x_*)$, donc $\ell = f(x_*)$. Ainsi, $f(\mathbb{R}^d)$ est un fermé de $\mathbb{R}^d$.

Comme $\mathbb{R}^d$ est connexe, $f(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d$, et ainsi f est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$ sur lui-même. $\square$