

Caractérisation d'Artin de la fonction Γ

Leçons : 228, 229, 253

Référence : *Oraux X-ENS*, tome 5, H. Gianella, p. 199.

Théorème 1 (Caractérisation d'Artin). *Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que :*

- ① $f(1) = 1$;
- ② $\forall x > 0, f(x+1) = x f(x)$;
- ③ f est logarithmiquement convexe.

Démonstration. Étape 1 (Unicité) : Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifiant ①, ② et ③.

En utilisant ① et ②, on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = (n-1)!$.

Soit $x = p + \lambda$, $p \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in]0, 1[$. On a, d'une part, d'après ②, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(x) = \frac{f(x+1)}{x} = \dots = \frac{f(x+n+1)}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Et on a

$$\begin{aligned} f(x+n+1) &= f(p+\lambda+n+1) = f((1-\lambda)(p+n+1) + \lambda(p+n+2)) \\ &\stackrel{\substack{\text{car } f \text{ est} \\ \text{log-convexe}}}{\leq} f(p+n+1)^{1-\lambda} f(p+n+2)^\lambda \\ &= f(p+n+1) (p+n+1)^\lambda \quad \left(\text{car } f(p+n+2) = \underbrace{(p+n+1) f(p+n+1)}_{=(p+n+1)!} \right) \\ &= n! (n+1) \dots (n+p) (n+p+1)^\lambda. \end{aligned}$$

Donc, d'une part, on a

$$f(x) \leq \frac{n! (n+1) \dots (n+p) (n+p+1)^\lambda}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Il ne nous reste alors qu'à minorer $f(x)$. On a

$$\begin{aligned} f(p+n+1) &= f(x-\lambda+n+1) = f((1-\lambda)(x+n+1) + \lambda(x+n)) \\ &\leq f(x+n+1)^{1-\lambda} f(x+n)^\lambda \\ &= f(x+n) (x+n)^{1-\lambda} \quad \left(\text{car } f(x+n+1) = (x+n) f(x+n) \right) \\ &= (x+n-1) \dots (x+1) x f(x) (x+n)^{1-\lambda}, \end{aligned}$$

donc

$$f(x) \geq \frac{f(p+n+1) (x+n)^\lambda}{x(x+1)\dots(x+n)} = \frac{(p+n)! (x+n)^\lambda}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Finalement, on a obtenu l'encadrement

$$\underbrace{\frac{n! (n+1) \cdots (n+p) (x+n)^\lambda}{x(x+1) \cdots (x+n)}}_{\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} f_n(x)} \leq f(x) \leq \underbrace{\frac{n! (n+1) \cdots (n+p) (n+p+1)^\lambda}{x(x+1) \cdots (x+n)}}_{\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} f_n(x)},$$

où on a posé $f_n(x) = \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}$.

Si la suite de fonctions (f_n) converge simplement, alors $f(x)$ sera déterminé par cette limite.

Lemme 2. $\forall x > 0$, la suite $(f_n(x))$ converge.

Démonstration du lemme. Soit $x > 0$. Posons $g_n = \ln(f_n(x)) = \ln(n!) + x \ln(n) - \sum_{k=0}^n \ln(x+k)$.

On a

$$\begin{aligned} g_n - g_{n-1} &= \ln(n) + x \ln(n) - x \ln(n-1) - \ln(x+n) \\ &= -\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - x \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - x\left(-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Donc, par comparaison, $\sum (g_n - g_{n-1})$ converge, donc, par le lien suite-série, (g_n) converge, et par continuité, $(f_n(x))$ converge. CQFD

Par théorème d'encadrement, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}$.

Étape 2 (Existence) : Montrons que $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ vérifie ①, ② et ③.

Vérifions d'abord que Γ est bien définie. En 0, $t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}$, qui est intégrable en 0 par critère de Riemann, et $t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} O(1/t^2)$, qui est aussi intégrable. Donc Γ est bien définie, et $\Gamma(1) = 1$.

Par théorème de dérivation, on montre que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)^k t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Γ est strictement positive, donc $g = \ln \circ \Gamma$ est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a, pour $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \quad \text{et par suite} \quad g''(x) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2}{\Gamma(x)^2}.$$

Et on a

$$\begin{aligned} \Gamma'(x)^2 &= \left(\int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt \right)^2 \\ &= \left(\int_0^{+\infty} \ln(t) t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2} \cdot t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2} dt \right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} \ln(t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \right) \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &= \Gamma''(x) \Gamma(x). \end{aligned}$$

Donc $g''(x) \geq 0$, et ainsi $\ln \circ \Gamma$ est convexe.

Et enfin, par intégration par parties, il vient

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x).$$

D'où le résultat, et de plus, $\forall x > 0$,

$$\frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(x).$$

□