

Formule de Poisson et théorème de Shannon

Leçons : 209, 241, 250

Références :

1. J. Bernis, *Analyse pour l'agrégation de mathématiques*, p. 225 (pour le développement).
2. Antoine Chambert-Loir, *Théorie de l'information*, p. 168 (pour le principe d'incertitude).
3. L. Schwartz, *Analyse IV*, p. 200, et Daniel Li, *Cours d'analyse fonctionnelle* (pour le théorème L^1 et pour l'application à la fonction θ de Jacobi).

Théorème 1 (Formule sommatoire de Poisson). Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n+t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{2ik\pi t}.$$

Démonstration. Soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact. Il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $K \subset [-N, N]$.
 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc il existe $C > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$|f(t)| \leq \frac{C}{1+t^2}.$$

Pour $t \in K$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| \geq N+1$, on a

$$|f(t+n)| \leq \frac{C}{1+(t+n)^2} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{C}{(|n|-N)^2}.$$

Justifions $(*)$:

Cas 1 : $n < -N$. Alors $(t+n)^2 - (|n|-N)^2 = \underbrace{(t-N)}_{\leq 0} \underbrace{(t+N+2n)}_{\leq 0} \geq 0$.

Cas 2 : $n > N$. Alors $(t+n)^2 - (|n|-N)^2 = \underbrace{(t+N)}_{\geq 0} \underbrace{(t+2n-N)}_{\geq 0} \geq 0$.

Et de plus, $\sum_{|n| \geq N+1} \frac{1}{(|n|-N)^2}$ converge. On a donc $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(\cdot + n)$ converge normalement sur K .

Posons alors $F : t \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+n)$. F est 1-périodique, et de plus, $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ aussi, donc

le même raisonnement entraîne que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(\cdot + n)$ converge normalement sur tout compact.

Montrons maintenant que F est de classe $\mathcal{C}^1$. On a :

① $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t+n)$ converge simplement ;

- ② $\forall n \in \mathbb{Z}, t \mapsto f(t+n)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;
 ③ $\forall K \subset \mathbb{R}$ compact, $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall t \in K$, il existe $N > 0$ et $C > 0$ tels que

$$|f'(t+n)| \leq \frac{C}{(|n| - N)^2} \mathbf{1}_{[-N, N]^c}(n) + \frac{1}{4N^2} \mathbf{1}_{[-N, N]}(n).$$

Donc, F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique.

Calculons les coefficients de Fourier de F . Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a

$$\begin{aligned} c_k(F) &= \int_0^1 F(t) e^{-2ik\pi t} dt = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+n) e^{-2ik\pi t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(t+n) e^{-2ik\pi t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(t) e^{-2ik\pi(t-n)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2ik\pi t} dt, \end{aligned}$$

donc $c_k(F) = \hat{f}(k)$.

Donc, par le théorème de Dirichlet, on a, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(F) e^{2i\pi n t},$$

d'où, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{2ik\pi t}.$$

□

Théorème 2 (Shannon, 1949). Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Supposons que $\hat{f}$ soit nulle en dehors d'un compact $[-F, F]$ avec $2F < 1$. Alors, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \frac{\sin[(n-t)\pi]}{(n-t)\pi}.$$

Démonstration. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, donc $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. D'après la formule sommatoire de Poisson, on a, pour $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k + \xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{2i\pi n \xi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-n) e^{2i\pi n \xi}.$$

Comme $2F < 1$, le compact $[-F, F]$ est de largeur < 1 : dans la somme de gauche, seul le terme $k = 0$ peut contribuer pour $\xi \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Donc, $\forall \xi \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-n) e^{2i\pi n \xi},$$

et $\hat{f}(\xi) = 0, \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, car $2F < 1$.

Donc, on a, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi\xi t} d\xi = \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-n) e^{2i\pi n\xi} e^{2i\pi\xi t} d\xi \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-1/2}^{1/2} f(n) e^{2i\pi(t-n)\xi} d\xi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \frac{\sin(\pi(t-n))}{(t-n)\pi}. \end{aligned}$$

Remarque : on a prolongé par continuité $x \mapsto \sin(x)/x$ en 0 par la valeur 1. $\square$

On donne maintenant une extension du théorème de Shannon dans le cas L^2 .

Théorème 3 (Shannon — version L^2). *Considérons $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et notons $\text{BL}^2 = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f}|_{\mathbb{R} \setminus I} = 0 \text{ p.p.}\}$. Alors,*

(i) $(\text{BL}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert ;

(ii) l'application $\text{BL}^2 \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), f \mapsto (f(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une isométrie.

Démonstration. Montrons d'abord que BL^2 est un espace de Hilbert. BL^2 étant un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R})$, il nous suffit de vérifier que BL^2 est un fermé de $L^2(\mathbb{R})$.

Soit donc $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de BL^2 convergeant dans L^2 vers une fonction f . Montrons que $f \in \text{BL}^2$, i.e. que $\hat{f}|_{\mathbb{R} \setminus I} = 0$ p.p.

Par continuité de la transformation de Fourier-Plancherel $\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2, f \mapsto \hat{f}$, on a $\hat{f}_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \hat{f}$ dans L^2 , donc

$$\|\mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus I}(\hat{f}_k - \hat{f})\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \text{ dans } L^2.$$

On a donc

$$\|\hat{f} \mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus I}\| \leq \|\mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus I}(\hat{f} - \hat{f}_k)\|_2 + \underbrace{\|\mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus I} \hat{f}_k\|_2}_{=0},$$

donc $\hat{f} \mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus I} = 0$ p.p., donc BL^2 est un fermé de $L^2(\mathbb{R})$, d'où

$\text{BL}^2 \text{ est un espace de Hilbert.}$

Démontrons maintenant le point (ii). Commençons par déterminer une base hilbertienne de BL^2 . Pour $k \in \mathbb{Z}$, posons

$$\varepsilon_k : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin((k-x)\pi)}{(k-x)\pi} & \text{si } x \neq k, \\ 1 & \text{si } x = k. \end{cases}$$

Montrons que $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de BL^2 . Posons, pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$e_k : x \mapsto \begin{cases} e^{2i\pi kx} & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(I)$.

$\forall k \in \mathbb{Z}, \varepsilon_k \in \text{BL}^2$: Soit $k \in \mathbb{Z}$. Un calcul simple montre que $\hat{e}_k = \varepsilon_k$, donc, par inversion de Fourier, il vient $\hat{\varepsilon}_k = e_{-k}$, donc $\varepsilon_k \in \text{BL}^2$.

(ε_k) est une famille orthonormée : Pour $i, j \in \mathbb{Z}$, on a

$$\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \underset{\text{Plancherel}}{=} \langle \hat{\varepsilon}_i, \hat{\varepsilon}_j \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle e_{-i}, e_{-j} \rangle_{L^2(I)} = \delta_{ij}.$$

$\text{BL}^2 \cap \text{Vect}(\varepsilon_k)^\perp = \{0\}$: Soit $f \in \text{BL}^2 \cap \text{Vect}(\varepsilon_k)^\perp$. Alors on a $\hat{f}|_{\mathbb{R} \setminus I} = 0$ p.p., et $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\langle f, \varepsilon_k \rangle = \langle \hat{f}, e_{-k} \rangle = 0,$$

donc $\hat{f}|_I = 0$ p.p. et $\hat{f}|_{\mathbb{R} \setminus I} = 0$ p.p., donc par injectivité de la transformée de Fourier, $\hat{f} = 0$ p.p.

Finalement, on a bien montré que $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de BL^2 .

Lemme 4. Si $f \in \text{BL}^2$, alors f est continue et bornée, et de plus, $\|f\|_\infty \leq \|f\|_2$.

Démonstration du lemme. Soit $f \in \text{BL}^2$. Alors $\hat{f} \in L^2(I)$, et $\lambda(I) = 1$, donc $\hat{f} \in L^1(I)$, et $\hat{f}|_{\mathbb{R} \setminus I} = 0$ donc $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Donc, par le théorème d'inversion, p.p. $n \in \mathbb{R}$,

$$f(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi n\xi} d\xi = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi n\xi} d\xi.$$

Cauchy-Schwarz donne alors $\|f\|_\infty \leq \|f\|_2$, et la continuité de f résulte du théorème de continuité sous le signe intégral. CQFD

On a alors, pour $f \in \text{BL}^2$,

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varepsilon_k \rangle_{L^2} \varepsilon_k,$$

et

$$\langle f, \varepsilon_k \rangle = \int \hat{f}(\xi) e^{2ik\pi\xi} d\xi = f(k),$$

donc, par Parseval, $\|f\|_{L^2} = \|(f(n))_{n \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2}$. □