

Extrema liés et maximisation de Vandermonde sur la boule unité

Leçons : 159, 206, 214, 215, 219

Référence : pas de référence précise pour le théorème des extrema liés ; *Oraux X-ENS*, tome 7, p. 396, pour l'application.

Théorème 1 (Extrema liés). *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $g_1, \dots, g_r : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Soit $a \in \Gamma$.*

Supposons que $f|_{\Gamma}$ admet en a un extremum relatif et que la famille $Dg_1(a), \dots, Dg_r(a)$ est libre dans $(\mathbb{R}^n)^$. Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que*

$$Df(a) = \sum_{i=1}^r \lambda_i Dg_i(a).$$

Démonstration. Supposons par exemple que f admet en a un maximum relatif (sur Γ).

Par hypothèse, la famille $(Dg_i(a))_{1 \leq i \leq r}$ est libre, donc $r \leq n$. Si $r = n$, alors c'est une base et le résultat s'ensuit. Supposons donc $r < n$.

Supposons par l'absurde que la famille $Dg_1(a), \dots, Dg_r(a), Df(a)$ est libre. On complète alors cette famille en une base $Dg_1(a), \dots, Dg_r(a), Df(a), f_{r+2}, \dots, f_n$ de $(\mathbb{R}^n)^*$.

Posons alors

$$\begin{aligned} F : U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto (g_1(x), \dots, g_r(x), f(x), f_{r+2}(x), \dots, f_n(x)). \end{aligned}$$

On a alors

$$J_F(a) = \begin{pmatrix} Dg_1(a) \\ \vdots \\ Dg_r(a) \\ Df(a) \\ f_{r+2} \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

dont les lignes forment, par construction, une base de $(\mathbb{R}^n)^*$; donc $J_F(a) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, et d'après le théorème d'inversion locale, il existe W un ouvert contenant a tel que $F(W)$ soit un voisinage de $F(a)$ et tel que $F : W \rightarrow F(W)$ soit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. Notons $M = f(a)$.

Quitte à restreindre W , on peut supposer que M est un maximum sur W , i.e.

$$M = \sup_{\Gamma \cap W} |f|.$$

On a

$$\begin{aligned} F(a) &= (0, \dots, 0, f(a), f_{r+2}(a), \dots, f_n(a)) \\ &= (0, \dots, 0, M, f_{r+2}(a), \dots, f_n(a)). \end{aligned}$$

$F(W)$ est un voisinage de $F(a)$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$(0, \dots, 0, M + \varepsilon, f_{r+2}(a), \dots, f_n(a)) \in F(W).$$

Donc, il existe $b \in W \subset \Gamma$ tel que

$$F(b) = (0, \dots, 0, M + \varepsilon, f_{r+2}(a), \dots, f_n(a)),$$

et ainsi $f(b) = M + \varepsilon$, donc $f(b) > f(a)$, ce qui est absurde.

Donc la famille $Dg_1(a), \dots, Dg_r(a), Df(a)$ est liée, ce qui termine la preuve. $\square$

Proposition 2 (Application). *Posons*

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \det(x_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n} \end{aligned}$$

le déterminant de Vandermonde. Soit B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$, S la sphère unité, et $(H) : \sum_{i=1}^n x_i = 0$.

Posons

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1, \end{aligned}$$

de sorte que $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$.

Alors, V admet sur B un maximum, atteint en un point de $S \cap H$.

Démonstration. On rappelle qu'on a, $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$V(x) = \prod_{i < j} (x_j - x_i).$$

V est ainsi polynomiale, homogène et antisymétrique, de degré $N = \frac{n(n-1)}{2}$.

V admet un maximum sur B : V est continue (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur B , qui est compact, donc V est bornée sur B et atteint ses bornes, i.e. $\sup_B |V| < +\infty$ et il existe $a \in B$ tel que $V(a) = \sup_B |V|$.

$a \in S$: D'une part, on a $\|a\| \leq 1$. D'autre part, $V(a) > 0$ car V prend des valeurs non nulles sur la boule unité fermée, et donc $a \neq 0$. De plus, on a

$$V(a) \geq V\left(\frac{a}{\|a\|}\right) = \frac{V(a)}{\|a\|^N},$$

et par suite $\|a\| \geq 1$. Donc $a \in S$.

$a \in H$: Montrons que $\sum_{i=1}^n a_i = 0$.

$V|_S$ admet un maximum relatif en $a \in S$ donc, d'après le théorème des extrema liés, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla V(a) = \alpha \nabla g(a)$. Or, $\nabla g(a) = (2a_1, \dots, 2a_n)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(a) = \lambda a_i.$$

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Calculons $\frac{\partial V}{\partial x_k}$. On a, pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x_k}(x) &= \sum_{i < k} \frac{V(x)}{x_k - x_i} - \sum_{k < i} \frac{V(x)}{x_i - x_k} \\ &= V(x) \sum_{i \neq k} \frac{1}{x_k - x_i}.\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\lambda \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \lambda a_k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k}(a) = \sum_{k=1}^n V(a) \sum_{i \neq k} \frac{1}{a_k - a_i} \\ &= V(a) \underbrace{\sum_{\substack{i,k \\ i \neq k}} \frac{1}{a_k - a_i}}_{=0},\end{aligned}$$

donc $\lambda \sum_{k=1}^n a_k = 0$.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que $\lambda \neq 0$. Posons, pour $t > 0$, $\varphi(t) = V(at) = t^N V(a)$. En dérivant par rapport à t , il vient

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial V}{\partial x_i}(at) = N t^{N-1} V(a),$$

donc, $\forall t > 0$,

$$\langle \nabla V(at), a \rangle = N t^{N-1} V(a).$$

En prenant $t = 1$, il vient

$$\langle \nabla V(a), a \rangle = N V(a) \neq 0,$$

donc $\nabla V(a) \neq 0$. Or, $\nabla V(a) = \lambda \nabla g(a)$, donc $\lambda \neq 0$.

Et donc $\sum_{i=1}^n a_i = 0$, donc $a \in H$. □